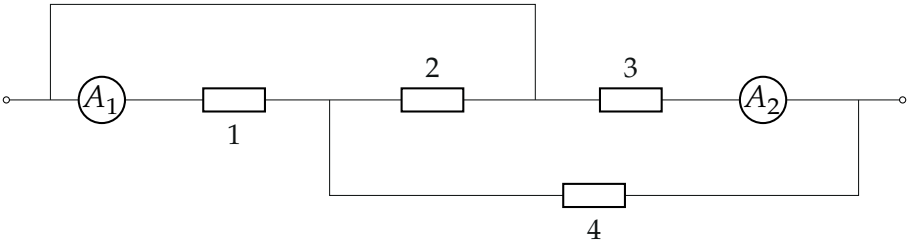
Резисторы и два амперметра

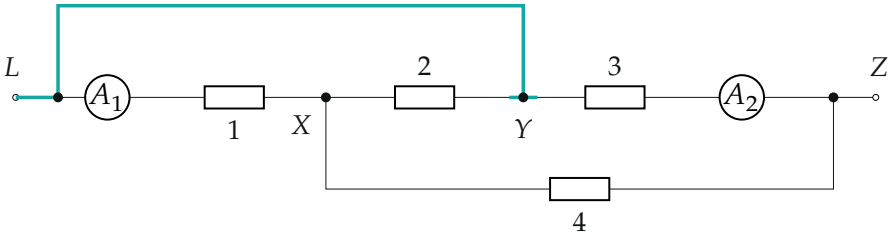
Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, площадка 1, задача 2] Четыре резистора с сопротивлениями $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $R_4 = 8$ Ом соединены в цепь вместе с двумя идеальными амперметрами (с нулевым сопротивлением) так, как показано на рисунке. Показания амперметра A_1 известны — $I_1 = 0{,}1$ А. Найти показания амперметра A_2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на смешанное соединение. Идеальный амперметр — просто провод: на нём нет напряжения. Поэтому сначала заменяем амперметры проводниками, находим, какие узлы цепи на самом деле совпадают, и перерисовываем цепь в понятном виде. Потом остаётся закон Ома для каждого участка.

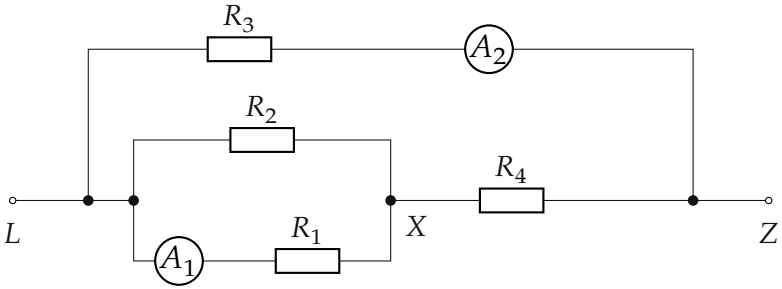
Обозначения. Левый вывод цепи — L, правый — Z; узел между резисторами 1 и 2 (от него вниз идёт резистор 4) — X; точка между резисторами 2 и 3, куда приходит верхний провод, — Y. Напряжение между выводами U, токи через резисторы $I_{р1}, \ldots, I_{р4}$; I_1, I_2 — показания амперметров.

1. Какие точки соединены проводом. Верхний провод соединяет L прямо с Y, значит, $\varphi_Y = \varphi_L$. Амперметр A_1 сопротивления не имеет, поэтому левый конец резистора 1 тоже имеет потенциал φ_L. Амперметр A_2 ставит правый конец резистора 3 под потенциал φ_Z. На рисунке точки одного потенциала отмечены одним цветом.



Бирюзой — провода с потенциалом левого вывода L: через амперметр A_1 и верхний провод к ним присоединены левый конец резистора 1 и правый конец резистора 2 (точка Y)

2. Эквивалентная схема. Резистор 1 включён между L и X, резистор 2 — между $Y = L$ и X: они соединены *параллельно*. Последовательно с ними — резистор 4 от X до Z. Резистор 3 подключён прямо между L и Z, параллельно всей нижней ветви. Амперметр A_1 стоит в ветви резистора 1, а A_2 — в ветви резистора 3.



Та же цепь, перерисованная: $R_1 \parallel R_2$, последовательно R_4; R_3 — параллельно всей нижней ветви

3. Нижняя ветвь. Сопротивление параллельных резисторов 1 и 2:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{9}\ \text{Ом} = 2\ \text{Ом}.$$

С последовательным R_4 сопротивление нижней ветви $R_\text{н} = R_{12} + R_4 = 10$ Ом. Закон Ома для этой ветви: через R_4 идёт ток $I_{\text{р}4} = U/R_\text{н} = U/10$ Ом.

4. Ток через A_1. На параллельных R_1 и R_2 одно напряжение U_{LX}, поэтому ток I_{p4} делится обратно сопротивлениям: в R_1 (и в амперметр A_1) уходит доля $R_2/(R_1+R_2) = 1/3$:

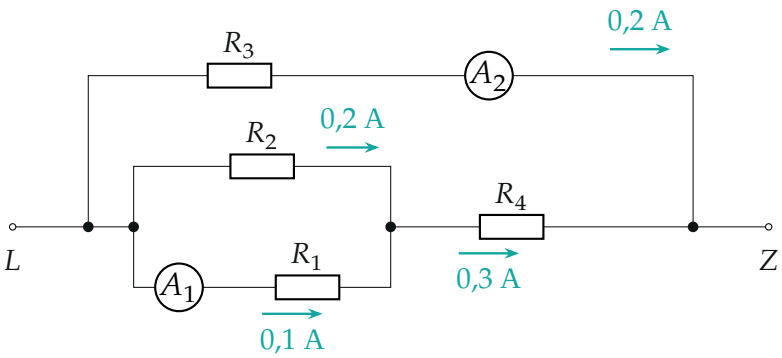
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} I_{p4} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{U}{R_{12}+R_4} = \frac{U}{30\ \text{Ом}}.$$

Отсюда напряжение на цепи $U = 30\ \text{Ом} \cdot I_1 = 3\ \text{В}$.

5. Ток через A_2. Резистор R_3 стоит прямо под напряжением U; закон Ома для него:

$$I_2 = \frac{U}{R_3} = \frac{U}{15\ \text{Ом}}.$$

Сравнивая с п. 4, $I_2 = 2I_1$.



Токи в ветвях при $U = 3$ В: 0,1 и 0,2 А через R_1 и R_2 сходятся в 0,3 А через R_4; через R_3 и A_2 — 0,2 А

Обратите внимание: амперметр A_1 показывает ток только резистора 1, а не всей нижней ветви: часть тока обходит его через верхний провод и резистор 2.

Соберём ответ:

$$I_2 = \frac{R_{12}+R_4}{R_3} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_2} I_1 = \frac{10}{15} \cdot 3 \cdot 0{,}1\ \text{А} = 0{,}2\ \text{А}.$$

Проверка. Закон сохранения заряда в узле X: в него входят $I_{p1} = 0{,}1$ А и $I_{p2} = U_{LX}/R_2 = (0{,}1 \cdot 6/3)$ А $= 0{,}2$ А, выходит $I_{p4} = 0{,}3$ А

— сходится; напряжения $U_{LX} + U_{XZ} = 0{,}6\ \text{В} + 2{,}4\ \text{В} = 3\ \text{В} = U$. Размерность: отношение сопротивлений безразмерно, ответ — в амперах. Физический смысл: у ветви с R_3 сопротивление больше, чем у нижней, но в A_1 попадает лишь треть тока нижней ветви, поэтому A_2 показывает больше.

Ответ. $I_2 = 2I_1 = 0{,}2\ \text{А}$.