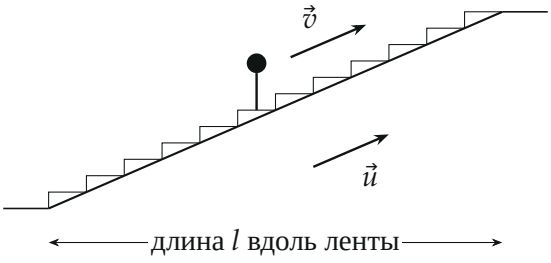
Счёт ступенек эскалатора

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, площадка 1, задача 5] Человек движется по эскалатору и считает ступеньки. В первый раз, двигаясь с некоторой постоянной скоростью, он насчитал $n_1 = 65$ ступенек. Во второй раз его скорость относительно эскалатора была вдвое больше его скорости относительно эскалатора в первом случае, и он насчитал $n_2 = 80$ ступенек. Сколько ступенек он насчитает на покоящемся эскалаторе?



Поясняющий рисунок: $\vec{v}$ — скорость человека относительно эскалатора, $\vec{u}$ — скорость ленты эскалатора относительно земли

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Ступеньки едут вместе с лентой, поэтому человек считает только те ступеньки, по которым он *прошёл относительно ленты*: их число — его перемещение в системе отсчёта эскалатора, делённое на длину ступеньки. А время на эскалаторе задаёт движение относительно земли: надо пройти всю длину l со скоростью $v + u$. Человек насчитал разное число ступенек, поэтому он идёт по ходу ленты: чем быстрее он идёт, тем меньшую часть пути «делает» за него лента и тем больше ступенек он насчитывает.

Обозначения. v — скорость человека относительно эскалатора в первый раз (во второй — $2v$); u — скорость ленты относительно земли; l — длина эскалатора; Δl — длина одной ступеньки; $N = l/\Delta l$ — искомое число ступенек на неподвижном эскалаторе; $x = u/v$ — безразмерное отношение скоростей. Ось X — вдоль ленты по ходу движения.

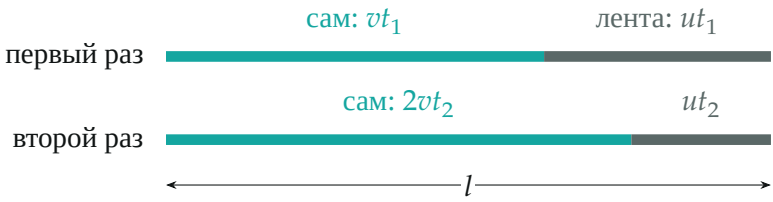
1. Время подъёма. Закон сложения скоростей: скорость человека относительно земли $\vec{v}_з = \vec{v} + \vec{u}$, в проекции на ось X — $v + u$. Весь путь

относительно земли равен l, поэтому время на эскалаторе

$$t_1 = \frac{l}{v+u}.$$

2. Перемещение относительно ленты. В системе отсчёта ленты человек идёт со скоростью v и за время t_1 проходит vt_1. Эквивалентно: от пути l отнимаем то, что за это время провезла лента, ut_1. Число ступенек

$$n_1 = \frac{vt_1}{\Delta l} = \frac{l}{\Delta l}\cdot\frac{v}{v+u} = \frac{N}{1+x}.$$



Путь l относительно земли складывается из пути человека относительно ленты (бирюзой, по нему он считает ступеньки) и пути самой ленты (серым). Длины отрезков — для найденного ответа: $n_1/N = 65/104$, $n_2/N = 80/104$

3. Второй раз. Скорость относительно ленты $2v$, относительно земли $2v+u$. Те же два шага дают

$$t_2 = \frac{l}{2v+u}, \qquad n_2 = \frac{2vt_2}{\Delta l} = N\frac{2v}{2v+u} = \frac{2N}{2+x}.$$

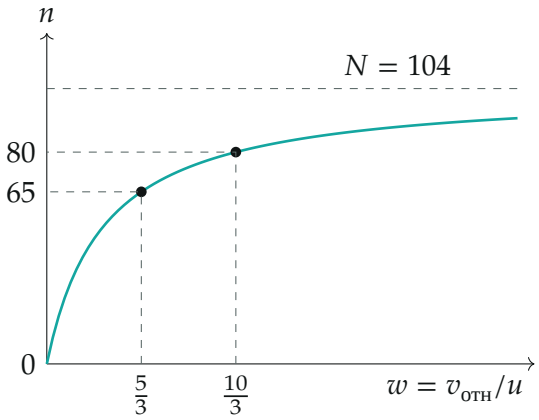
4. Неизвестным осталось x. Два уравнения, два неизвестных (N и x); l, Δl, v и u по отдельности не нужны. Делим второе на первое, чтобы N ушло:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{2(1+x)}{2+x} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2(n_2-n_1)}{2n_1-n_2} = \frac{2\cdot 15}{50} = 0{,}6.$$

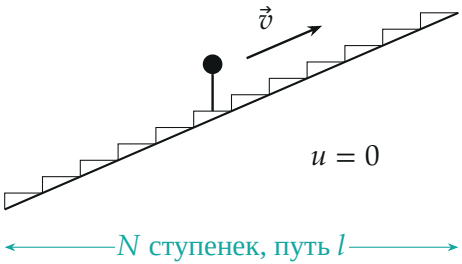
Лента едет со скоростью 0,6 от скорости шага человека в первый раз.

5. Ответ. Из п. 2: $N = n_1(1 + x)$, подставляем x:

$$N = n_1\left(1 + \frac{2(n_2 - n_1)}{2n_1 - n_2}\right) = \frac{n_1 n_2}{2n_1 - n_2} = \frac{65 \cdot 80}{130 - 80} = 104.$$



Сколько ступенек насчитает человек при скорости $v_{отн}$ относительно ленты: $n = N\,w/(w+1)$. Точки — два опыта ($w = 1/x$ и $2/x$); при очень быстром шаге $n \to N$



Эскалатор стоит: лента ничего не провозит, и человек проходит относительно ступенек всю длину l — насчитывает $N = l/\Delta l$

Обратите внимание: число ступенек определяется перемещением относительно *ленты*, а время — движением относительно *земли*. Если считать ступеньки по пути относительно земли, получится N в обоих опытах, что противоречит условию.

Проверка. Подставим $x = 0{,}6$: $n_1 = 104/1{,}6 = 65$, $n_2 = 2 \cdot 104/2{,}6 = 80$ — оба опыта воспроизводятся. Предел: если лента стоит ($n_1 = n_2$), формула даёт $N = n_1^2/n_1 = n_1$ — верно. Ответ безразмерный, как и положено числу ступенек. Физический смысл: на движущейся по ходу ленте человек насчитывает меньше ступенек, чем их есть, и тем меньше, чем медленнее идёт, поэтому N больше обоих чисел 65 и 80.

Ответ. $N = \dfrac{n_1 n_2}{2n_1 - n_2} = 104$ ступеньки.