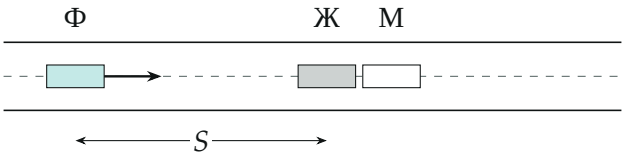
Феррари, Мерседес и Жигули

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, площадка 2, задача 2] Феррари, Мерседес и Жигули движутся с постоянными скоростями по прямой дороге. Когда Мерседес и Жигули находились в одной точке, Феррари был на расстоянии S позади. Когда Феррари догнал Жигули, Мерседес был впереди них на расстоянии $5S/6$. На каком расстоянии позади Феррари и Мерседеса окажутся Жигули в тот момент, когда Феррари догонит Мерседес?

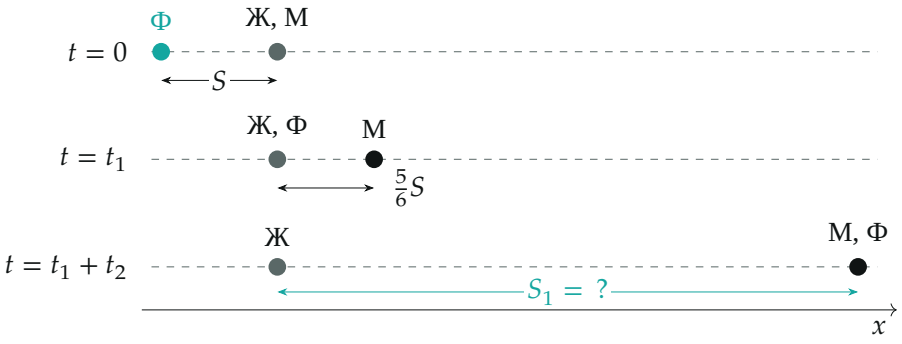


Поясняющий рисунок: первый момент — Мерседес и Жигули рядом, Феррари на S позади

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение. Все три машины едут равномерно, поэтому удобнее всего перейти в систему отсчёта Жигули: в ней Жигули стоят, а Феррари и Мерседес едут с постоянными *относительными* скоростями. Тогда первый этап сразу даёт отношение этих скоростей, а второй — искомое расстояние. Скорости машин по отдельности не нужны.

Обозначения. Ось x — вдоль дороги по ходу движения, начало — в Жигули (система отсчёта связана с Жигули). $w_ф = v_ф - v_ж$ и $w_м = v_м - v_ж$ — проекции скоростей Феррари и Мерседеса относительно Жигули; t_1 — время первого этапа (Феррари догоняет Жигули), t_2 — второго (Феррари догоняет Мерседес); S_1 — искомое расстояние.

1. Переход в систему Жигули. По закону сложения скоростей скорость машины относительно Жигули равна её скорости относительно земли минус скорость Жигули. Все скорости постоянны, значит, и относительные постоянны: в системе Жигули Феррари и Мерседес тоже движутся равномерно, а Жигули стоят в точке $x = 0$.



Три момента в системе отсчёта Жигули (Жигули стоят в $x = 0$). Масштаб — по найденному ответу $S_1 = 5S$

2. Первый этап. В системе Жигули Феррари проходит расстояние S за время

$$t_1 = \frac{S}{w_ф}.$$

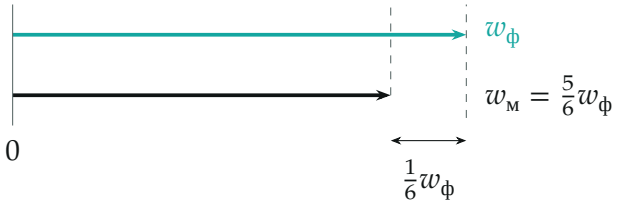
Мерседес стартует от Жигули и за то же время уходит от них на $w_м t_1$. По условию это $5S/6$:

$$w_м \frac{S}{w_ф} = \frac{5}{6} S \quad \Rightarrow \quad \frac{w_м}{w_ф} = \frac{5}{6}.$$

Мерседес относительно Жигули едет на шестую часть медленнее Феррари.

3. Второй этап. Теперь Феррари и Жигули рядом, Мерседес впереди на $\frac{5}{6}S$. Феррари догоняет его со скоростью сближения $w_ф - w_м = \frac{1}{6}w_ф$, поэтому

$$t_2 = \frac{5S/6}{w_ф - w_м} = \frac{5S/6}{w_ф/6} = \frac{5S}{w_ф} = 5t_1.$$

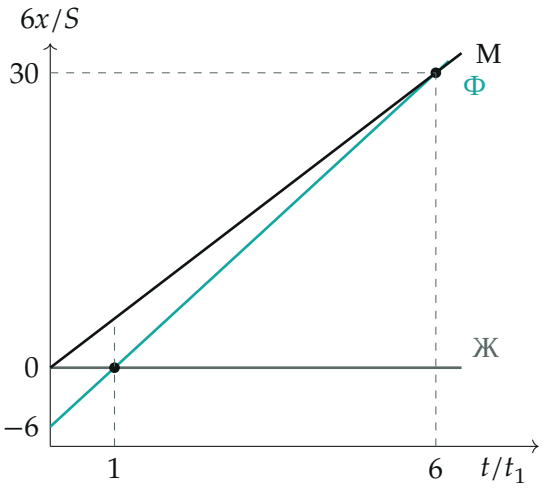


Скорости относительно Жигули: Феррари догоняет Мерседес со скоростью сближения $w_ф/6$ — вшестеро медленнее, чем догонял Жигули

4. Ответ. Жигули в своей системе стоят, а Феррари за время t_2 уходит от них на $w_ф t_2$. В момент встречи с Мерседесом расстояние до Жигули

$$S_1 = w_ф t_2 = w_ф \cdot \frac{5S}{w_ф} = 5S.$$

В общем виде, с $\alpha = w_м/w_ф = \frac{5}{6}$: $S_1 = \dfrac{\alpha S}{1-\alpha} = 5S$.



Координаты машин в системе Жигули (по оси x — в единицах $S/6$): Феррари пересекает линию Жигули при $t = t_1$ и догоняет Мерседес при $t = 6t_1$, на расстоянии $30 \cdot S/6 = 5S$

Обратите внимание: в системе отсчёта Жигули искомое расстояние — просто координата Феррари в момент встречи. В системе земли пришлось бы искать четыре пути и вычитать их, как в официальном решении; ответ тот же.

Проверка. Пусть, например, $v_ж = 0$, $v_ф = 6$, $v_м = 5$ (в любых единицах), $S = 6$: Феррари догоняет Жигули через 1, Мерседес тогда в точке $5 = \frac{5}{6}S$; дальше Феррари догоняет Мерседес через $5/(6-5) = 5$ — в

точке $30 = 5S$. Ответ имеет размерность длины. Предел: если бы Мерседес относительно Жигули ехал почти как Феррари ($\alpha \to 1$), Феррари догонял бы его бесконечно долго и $S_1 \to \infty$ — формула $\alpha S/(1-\alpha)$ это и показывает.

Ответ. $S_1 = 5S$.