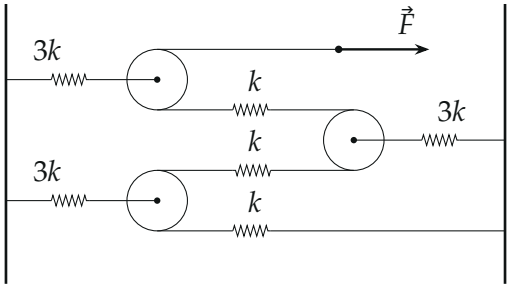
Пружины и три блока

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, площадка 2, задача 3] Три одинаковые пружины с коэффициентами жёсткости k связаны кусками невесомой нерастяжимой нити. Полученная нить переброшена через три невесомых блока, привязанных к вертикальным стенам с помощью одинаковых пружин с коэффициентами жёсткости $3k$ (см. рисунок). На конец нити действуют силой F. Насколько переместится при этом конец нити?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на последовательное соединение пружин через блоки. Конец нити уходит по двум причинам: растягиваются три пружины k, вставленные в саму нить, и сдвигаются блоки (растягиваются пружины $3k$), отдавая нить. Ключ — натяжение невесомой нити одинаково по всей длине, в том числе по обе стороны невесомого блока и в пружинах k; отсюда сразу все силы. Перемещение конца — сумма удлинений всех участков нити между неподвижными точками.

Обозначения. T — натяжение нити; Δx — удлинение каждой пружины k; Δx_1 — удлинение каждой пружины $3k$ (на столько же сдвигается её блок); Δl — перемещение конца нити. Нумерация блоков сверху вниз: 1, 2, 3. Конец нити тянут медленно, в итоге всё покоится.

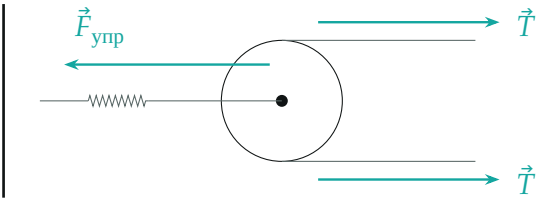
1. Натяжение нити. Второй закон Ньютона для невесомого куска нити (или невесомой пружины) даёт: равнодействующая сил на него равна нулю, поэтому сила одна и та же вдоль всей нити. На конце она равна F:

$$T = F.$$

Невесомый блок вращается свободно, и натяжение по обе стороны от него тоже одинаково.

2. Пружины k. Каждая растянута силой $T = F$; закон Гука:

$$k\,\Delta x = F \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{k}.$$



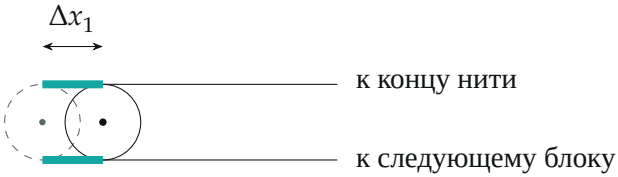
Блок 1 отдельно: нить тянет его двумя ветвями по $T = F$ вправо, пружина $3k$ — влево силой $F_{упр} = 2F$

3. Пружины $3k$. Запишем условие равновесия невесомого блока (второй закон Ньютона при нулевой массе) в проекции на горизонталь. Нить охватывает блок двумя ветвями, обе тянут в одну сторону с силой T, пружина держит блок с другой стороны:

$$F_{\text{упр}} - 2T = 0 \quad \Rightarrow \quad 3k\,\Delta x_1 = 2F, \qquad \Delta x_1 = \frac{2F}{3k}.$$

Так для каждого из трёх блоков: блоки 1 и 3 сдвигаются вправо, блок 2 — влево, каждый на Δx_1.

4. Сколько нити отдаёт блок. Блок сдвинулся на Δx_1 к той стороне, откуда приходят обе ветви нити. Каждая ветвь между блоком и соседней точкой нити стала короче на Δx_1, вместе — на $2\Delta x_1$. Нить нерастяжима (кроме пружин k), поэтому этот кусок $2\Delta x_1$ уходит к свободному концу.

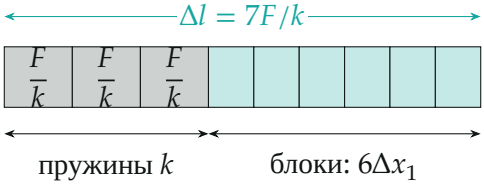


$2\Delta x_1$ нити освободилось

Блок сдвинулся на Δx_1 (пунктир — до, сплошной — после): обе ветви укоротились на Δx_1 (бирюзой), всего $2\Delta x_1$ нити ушло дальше

5. Сумма. Правый конец нижней ветви закреплён на стене. Перемещение свободного конца — сумма всех удлинений вдоль нити: трёх пружин k и трёх кусков по $2\Delta x_1$ от блоков:

$$\Delta l = 3\Delta x + 3\cdot 2\Delta x_1 = \frac{3F}{k} + \frac{6\cdot 2F}{3k} = \frac{3F}{k} + \frac{4F}{k} = \frac{7F}{k}.$$



Из чего складывается Δl (в масштабе): три пружины k по F/k и шесть ветвей у блоков по $\Delta x_1 = \frac{2}{3}F/k$

Обратите внимание: блок держит не силу F, а $2F$ — его тянут две ветви нити. И каждый сдвиг блока отдаёт нити вдвое больше своего смещения.

Проверка. Второй способ — энергия. Работа силы F при медленном растяжении от нуля равна $\frac{1}{2}F\Delta l$ и идёт в энергию пружин: $3\cdot\frac{F^2}{2k} + 3\cdot\frac{(2F)^2}{2\cdot 3k} = \frac{3F^2}{2k} + \frac{2F^2}{k} = \frac{7F^2}{2k}$; отсюда $\Delta l = 7F/k$ — то же. Размерность: F/k — длина. Предел: если пружины $3k$ очень жёсткие, блоки стоят и остаётся $3F/k$ — три последовательные пружины. Система ведёт себя как одна пружина жёсткостью $k/7$.

Ответ. $\Delta l = 3\dfrac{F}{k} + 6\cdot\dfrac{2F}{3k} = \dfrac{7F}{k}$.