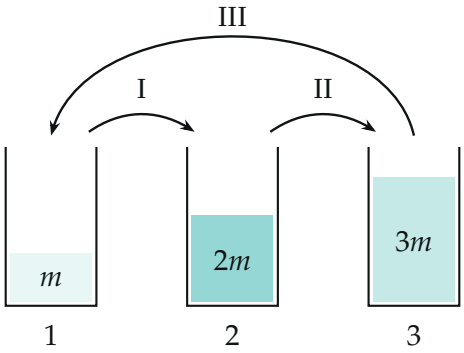
Переливание воды между тремя стаканами

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 8 класс, площадка 2, задача 4] Имеется три стакана, содержащие массы m, $2m$ и $3m$ воды. В первом стакане вода холодная, во втором — горячая, в третьем имеет некоторую промежуточную температуру. Из первого стакана берут ложку воды и переливают во второй, при этом температура воды во втором стакане уменьшается на величину Δt. Затем ложку воды из второго стакана переливают в третий, температура воды в третьем стакане возрастает на $\Delta t/2$. Затем ложку воды из третьего стакана переливают в первый. Насколько изменится при этом температура воды в третьем стакане? Потерями тепла пренебречь.



Поясняющий рисунок: стаканы 1 (холодный), 2 (горячий), 3 (промежуточный) и три переливания ложкой I, II, III

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса. Смешивание внутри стакана меняет его температуру, а зачерпывание ложки — нет: из стакана уходит вода той же температуры, что и остаётся. Поэтому на последнем шаге, когда ложку *берут* из третьего стакана, его температура не меняется. Организаторы в решении ищут изменение температуры *первого* стакана за все три переливания; найдём и его — для этого удобно считать теплоту всей системы, а не каждую ложку.

Обозначения. c — удельная теплоёмкость воды; s — масса воды в ложке; t_1, t_2, t_3 — начальные температуры стаканов; Δt_1 — изменение температуры первого стакана за все переливания.

1. Третий стакан на шаге III. Вода в третьем стакане перемешана, у неё одна температура $t_3 + \Delta t/2$. Зачерпнули ложку — в ложке и в стакане вода той же температуры, теплообмена между ними не было:

$$\Delta t_3^{\text{III}} = 0.$$

За все три шага температура третьего стакана выросла на $\Delta t/2$ — только на шаге II.

2. Что стало с массами. Шаг I: стакан 1 отдал ложку, стакан 2 получил. Шаг II: стакан 2 отдал, 3 получил. Шаг III: стакан 3 отдал, 1 получил. Каждый стакан один раз отдал и один раз получил ложку, поэтому в конце массы снова m, $2m$, $3m$.

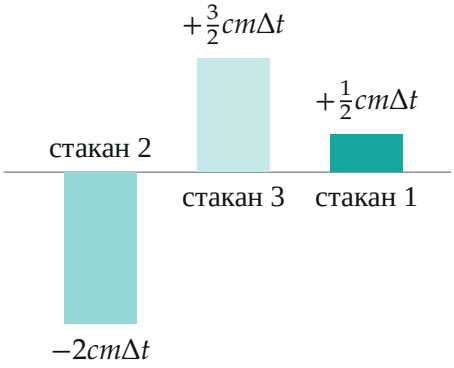
	стакан 1	стакан 2	стакан 3
до	m	$2m$	$3m$
после I	$m - s$	$2m + s$	$3m$
после II	$m - s$	$2m$	$3m + s$
после III	m	$2m$	$3m$

Массы воды в стаканах по шагам: в конце они те же, что в начале

3. Тепловой баланс за все шаги. Потерь нет, поэтому теплота, отданная одними порциями воды, получена другими: суммарная внутренняя энергия воды $c\,(mt_1 + 2mt_2 + 3mt_3)$ не меняется. Массы в конце те же, поэтому изменения температур связаны уравнением

$$c\,m\,\Delta t_1 + c \cdot 2m\,\Delta t_2 + c \cdot 3m\,\Delta t_3 = 0.$$

Второй стакан на шаге I остыл на Δt, а на шаге II у него только зачерпнули ложку: $\Delta t_2 = -\Delta t$. Третий нагрелся на шаге II на $\Delta t/2$, а на шаге III не изменился: $\Delta t_3 = +\Delta t/2$.



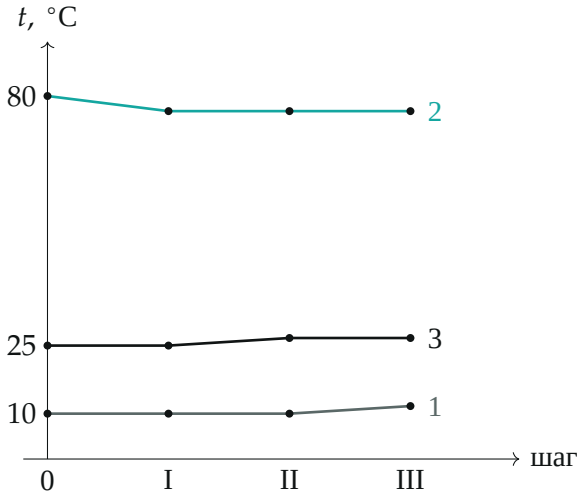
Изменения внутренней энергии воды в стаканах за все шаги: сумма равна нулю, первому достаётся остаток $\frac{1}{2}cm\Delta t$

4. Первый стакан. Подставляем:

$$m\,\Delta t_1 = -2m(-\Delta t) - 3m\cdot\frac{\Delta t}{2} = \frac{m\,\Delta t}{2} \quad\Rightarrow\quad \Delta t_1 = +\frac{\Delta t}{2}.$$

Знак плюс: вода в первом стакане в итоге нагрелась.

5. Пример в числах. Пусть $m = 1$ кг, ложка $s = 0{,}1$ кг, $t_1 = 10\,^\circ$C, $t_2 = 80\,^\circ$C. Шаг I: $\frac{2\cdot 80+0{,}1\cdot 10}{2{,}1} = 76{,}67\,^\circ$C, $\Delta t = 3{,}33\,^\circ$C. Чтобы на шаге II третий стакан нагрелся на $\Delta t/2 = 1{,}67\,^\circ$C, нужно $t_3 = 25\,^\circ$C: $\frac{3\cdot 25+0{,}1\cdot 76{,}67}{3{,}1} = 26{,}67\,^\circ$C. Шаг III: третий остаётся $26{,}67\,^\circ$C, в первом $\frac{0{,}9\cdot 10+0{,}1\cdot 26{,}67}{1} = 11{,}67\,^\circ$C — рост на $1{,}67\,^\circ$C $= \Delta t/2$.



Температуры стаканов после каждого шага в числовом примере: на шаге III третий стакан (чёрный) не меняется, первый нагревается на $\Delta t/2$

Обратите внимание: температура стакана меняется, только когда в него *вливают* воду другой температуры. Когда воду зачерпывают, его температура остаётся прежней.

Проверка. Размерность: Δt_1 — в градусах, как Δt. Численный пример из п. 5 считает каждое смешивание отдельно и даёт те же 0 для третьего стакана на шаге III и $+\Delta t/2$ для первого — независимо от того, что баланс в п. 3 записан сразу для всех шагов. Ответ не зависит от массы ложки: важно лишь, что каждый стакан один раз отдал и один раз получил ложку.

Ответ. Температура воды в третьем стакане при последнем переливании не изменится (за все три переливания она выросла на $\Delta t/2$). Температура воды в первом стакане в итоге возрастёт на $\Delta t_1 = \Delta t/2$.