Средняя скорость на половине пути

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 1, задача 1] Между городами A и B есть три деревни P, Q и R, причём для расстояний между населёнными пунктами справедливы такие соотношения: $AP : PQ : QR : RB = 1 : 2 : 3 : 4$. Автомобиль проехал между городами A и B так, что его скорость между каждыми ближайшими населёнными пунктами была постоянной, а времена прохождения отрезков AP, PQ, QR и RB относятся друг к другу как $4 : 3 : 2 : 1$. Найти среднюю скорость автомобиля на первой половине пути, если его скорость на отрезке RB равнялась v.



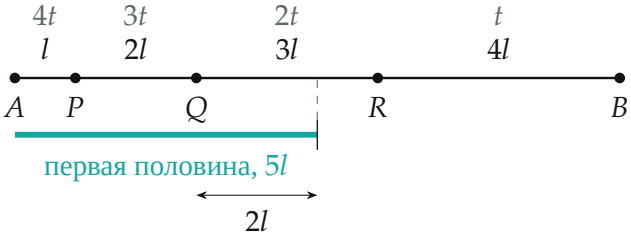
Поясняющий рисунок: дорога AB в масштабе $1 : 2 : 3 : 4$

▲ **Решение. Что происходит.** На каждом отрезке автомобиль едет равномерно, но с разной скоростью: короткие начальные отрезки он проходит долго, длинные конечные — быстро. Средняя скорость по определению — весь путь, делённый на всё время, а не среднее скоростей. Главная идея — выразить все длины через одну длину l, все времена через одно время t, и найти, где кончается первая половина пути. Класс задачи — средняя скорость при кусочно-равномерном движении.

Обозначения. $l = AP$ — длина первого отрезка, тогда $PQ = 2l$, $QR = 3l$, $RB = 4l$; t — время на отрезке RB, тогда времена на QR, PQ, AP равны $2t$, $3t$, $4t$; $v_{\text{ср}}$ — искомая средняя скорость.

1. Связь v с l и t. На отрезке RB движение равномерное, поэтому скорость — длина, делённая на время: $v = 4l/t$. Так же на остальных отрезках:

$$v_{AP} = \frac{l}{4t} = \frac{v}{16}, \qquad v_{PQ} = \frac{2l}{3t} = \frac{v}{6}, \qquad v_{QR} = \frac{3l}{2t} = \frac{3v}{8}.$$



Длины (над дорогой) и времена (серым) отрезков; первая половина пути кончается внутри QR, через $2l$ после Q

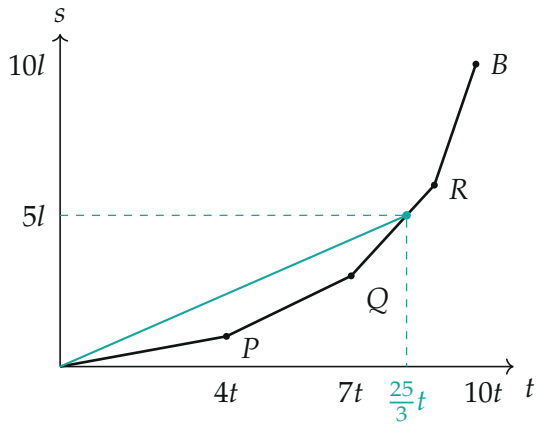
2. Где кончается первая половина пути. Весь путь $l + 2l + 3l + 4l = 10l$, половина — $5l$. До Q пройдено $l+2l = 3l$, до R — уже $6l > 5l$. Значит, первая половина состоит из AP, PQ и куска QR длиной $5l - 3l = 2l$ — двух третей отрезка QR.

3. Время на первой половине. На QR скорость постоянна, поэтому две трети отрезка автомобиль проезжает за две трети времени $2t$:

$$t_{1/2} = 4t + 3t + \frac{2}{3} \cdot 2t = \frac{25}{3}\,t.$$

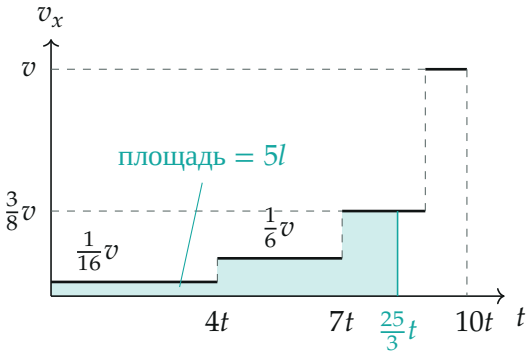
4. Средняя скорость. По определению

$$v_{\text{ср}} = \frac{5l}{t_{1/2}} = \frac{5l \cdot 3}{25t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{l}{t} = \frac{3}{5} \cdot \frac{v}{4} = \frac{3}{20}\,v.$$



Путь $s(t)$ в масштабе; бирюзовая хорда — средняя скорость на первой половине пути, её наклон $3l/(5t)$

5. Проверка вторым способом — через площадь под $v(t)$. Путь — площадь под графиком скорости. Ступеньки $\frac{v}{16}$, $\frac{v}{6}$, $\frac{3v}{8}$ длительностью $4t$, $3t$, $\frac{4}{3}t$ дают площадь $\frac{vt}{4}+\frac{vt}{2}+\frac{vt}{2}=\frac{5}{4}vt=5l$ — ровно половина пути (так как $vt=4l$). Делим на время $\frac{25}{3}t$: $v_{\text{ср}}=\frac{5}{4}vt\cdot\frac{3}{25t}=\frac{3}{20}v$.



Скорость по времени: закрашенная площадь — первая половина пути

Обратите внимание: «первая половина пути» — это $5l$, а не два первых отрезка и не первая половина времени. Граница попадает внутрь отрезка QR, и брать нужно только часть его времени.

Проверка. Размерность: $v_{\text{ср}}$ выражена через v — скорость. Оценка: на первой половине самая большая скорость $\frac{3}{8}v$, самая маленькая $\frac{1}{16}v$; ответ $\frac{3}{20}v=0{,}15v$ между ними и ближе к малым, потому что на малых скоростях автомобиль провёл больше времени. Смысл: средняя скорость — наклон хорды графика $s(t)$, а не среднее скоростей отрезков.

Ответ. $v_{\text{ср}}=\dfrac{3}{20}v$.