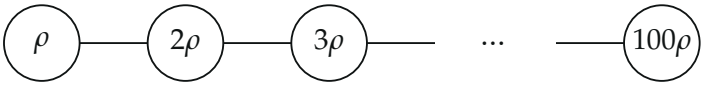
Сто тел на верёвках

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 1, задача 3] Сто тел одинакового объема V имеют плотности ρ, 2ρ, ... 100ρ. Тела связывают верёвками так, как показано на рисунке, и бросают в воду. При какой максимальной плотности ρ все тела не утонут в воде? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Тела связаны в одну цепочку, поэтому тонут или плавают все вместе: тяжёлые тянут лёгкие вниз через верёвки, лёгкие поддерживают тяжёлые. Верёвки — внутренние силы, они в условие плавания всей цепочки не входят. Ключевой закон — условие равновесия всей системы: сила Архимеда не меньше общей силы тяжести. Главная идея: цепочка плавает, если её средняя плотность не больше плотности воды. Класс задачи — плавание системы связанных тел.

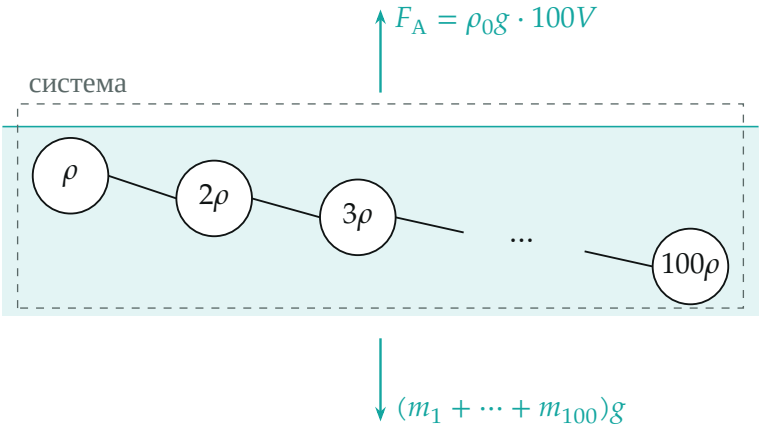
Обозначения. $\rho_i = i\rho$ — плотность i-го тела, $i = 1, \ldots, 100$; $m_i = i\rho V$ — его масса; $\rho_{\text{ср}}$ — средняя плотность цепочки; объём верёвок и их массу не учитываем.

1. Условие плавания цепочки. Самое большое значение ρ — когда цепочка только-только держится: все тела целиком под водой, но не идут ко дну. Тогда объём вытесненной воды наибольший, $100V$, и условие равновесия всей системы (второй закон Ньютона при нулевом ускорении, проекция на вертикаль вверх) даёт

$$F_{\text{A}} = \rho_0 g \cdot 100V \;\geq\; (m_1 + m_2 + \cdots + m_{100})\, g.$$

Разделим на $100Vg$: слева плотность воды, справа — средняя плотность цепочки

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_1 + \cdots + m_{100}}{100V} = \frac{\rho\,(1 + 2 + \cdots + 100)}{100} \;\leq\; \rho_0.$$



Цепочка в предельном случае: все тела под водой; на систему действуют только сила тяжести и сила Архимеда, натяжения верёвок — внутренние

2. Сумма $1+2+\cdots+100$**.** Сложим первое число с последним, второе с предпоследним и так далее: $1+100=101$, $2+99=101$, …, $50+51=101$. Пар 50, поэтому

$$1+2+\cdots+100 = 50\cdot 101 = 5050, \qquad \rho_{ср} = \frac{5050\,\rho}{100} = \frac{101}{2}\rho = 50{,}5\,\rho.$$

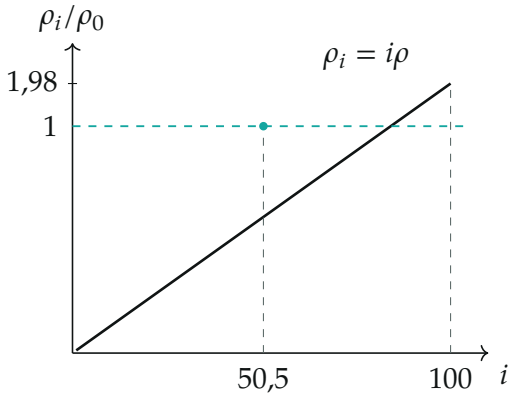
1	2	3	⋯	50
100	99	98	⋯	51

каждая пара = 101, пар 50

Сумма по парам: первое с последним, второе с предпоследним

3. Ответ. Подставим в условие плавания:

$$\frac{101}{2}\rho \le \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho \le \frac{2\rho_0}{101} = \frac{2000}{101}\ \text{кг/м}^3 \approx 19{,}8\ \text{кг/м}^3.$$



Плотности тел при $\rho = 19{,}8$ кг/м^3: от $0{,}02\rho_0$ до $1{,}98\rho_0$; их среднее ровно ρ_0 — это плотность «среднего» тела с номером 50,5

Обратите внимание: половина тел (с номерами от 51 до 100) тяжелее воды и поодиночке утонула бы. Держится цепочка только целиком, поэтому считать надо среднюю плотность всей системы, а не каждого тела.

Проверка. Размерность: ρ — плотность, $2\rho_0/101$ — тоже. Численно: $\rho = 19{,}8$ кг/м^3, средняя плотность $50{,}5 \cdot 19{,}8 = 1000$ кг/м^3 $= \rho_0$. Предельный случай: одно тело ($N = 1$) дало бы $\rho \leq \rho_0$, а для N тел общая формула $\rho \leq \dfrac{2\rho_0}{N+1}$ при $N = 100$ даёт наш ответ. Смысл: средняя плотность цепочки равна плотности среднего по номеру тела, $(1 + 100)\rho/2$.

Ответ. $\rho \leq \dfrac{2\rho_0}{101} \approx 19{,}8$ кг/м^3.