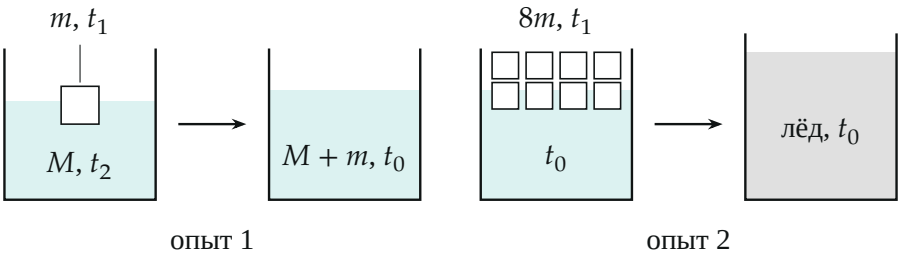
Лёд в калориметре

Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 1, задача 4] В калориметр, содержащей некоторое количество воды с неизвестной температурой, положили кусок льда с температурой $t_1 = -50\,^\circ\text{C}$. После установления равновесия весь лёд превратился в воду с температурой $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. После того как в калориметр положили ещё восемь таких же куска льда с той же температурой $t_1 = -50\,^\circ\text{C}$, вся вода превратилась в лёд с температурой $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Найти начальную температуру воды. Удельная теплоёмкость льда $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \cdot 10^3$ Дж/кг.



Поясняющий рисунок: два этапа опыта (бирюзовое — вода, белое и серое — лёд)

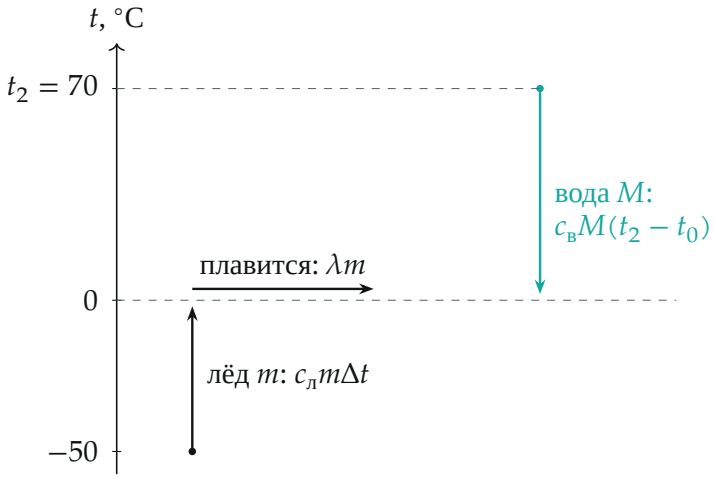
▲ **Решение. Что происходит.** В первом опыте горячая вода отдаёт тепло куску льда: лёд нагревается до $0\,^\circ\text{C}$ и плавится, вода остывает ровно до $0\,^\circ\text{C}$. Во втором опыте восемь холодных кусков льда нагреваются до $0\,^\circ\text{C}$ и отбирают у воды теплоту плавления — вся вода замерзает. Ключевой закон — уравнение теплового баланса (калориметр теплоизолирован, его теплоёмкостью пренебрегаем). Главная идея: второй опыт не содержит t_2 и даёт отношение масс льда и воды, а первый — саму t_2. Класс задачи — тепловой баланс с фазовыми переходами при известном конечном состоянии.

Обозначения. m — масса одного куска льда, M — масса воды, t_2 — искомая начальная температура воды; $\Delta t = t_0 - t_1 = 50\,^\circ\text{C}$ — нагрев каждого куска льда до $0\,^\circ\text{C}$.

1. Опыт 1: тепловой баланс. Уравнение теплового баланса: сколько теплоты получили одни тела, столько отдали другие. Лёд получил теплоту на нагрев от t_1 до t_0 и на плавление; вода отдала теплоту, остыв от t_2 до t_0:

$$c_л m\,\Delta t + \lambda m = c_в M\,(t_2 - t_0). \qquad (1)$$

Расплавленный лёд — вода при 0 °C, дальше он не греется, потому что конечная температура и есть 0 °C.



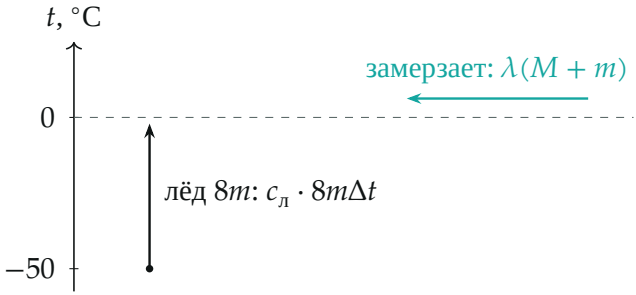
Опыт 1 на шкале температур в масштабе (с найденным $t_2 = 70\,°C$): лёд греется и плавится, вода остывает до 0 °C

2. Опыт 2: тепловой баланс. Теперь в калориметре вода массой $M + m$ при 0 °C. Восемь кусков льда нагрелись от t_1 до t_0 и остались льдом; вся вода при 0 °C отдала теплоту кристаллизации и стала льдом:

$$c_л \cdot 8m\,\Delta t = \lambda\,(M + m). \qquad (2)$$

Здесь нет t_2 — из (2) находим отношение масс:

$$\frac{m}{M} = \frac{\lambda}{8c_л\Delta t - \lambda} = \frac{336}{8 \cdot 2{,}1 \cdot 50 - 336} = \frac{336}{504} = \frac{2}{3}.$$



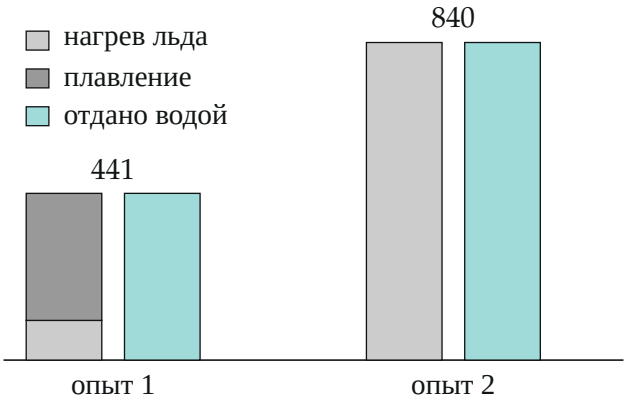
Опыт 2: восемь кусков льда греются до 0 °C, вода массой $M + m$ при 0 °C замерзает

3. Начальная температура. Неизвестным осталось только t_2. Из (1):

$$t_2 = t_0 + \frac{m}{M}\cdot\frac{c_л\Delta t + \lambda}{c_в} = 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2{,}1\cdot 10^3\cdot 50 + 336\cdot 10^3}{4{,}2\cdot 10^3} = \frac{2}{3}\cdot 105 = 70\,^\circ\text{C}.$$

В общем виде

$$t_2 = t_0 + \frac{\lambda\,(c_л\Delta t + \lambda)}{c_в(8c_л\Delta t - \lambda)}.$$



Теплоты в кДж при $m = 1$ кг, $M = 1{,}5$ кг: в каждом опыте полученное (серое) равно отданному (бирюзовое)

Обратите внимание: во втором опыте замерзает не только исходная вода M, но и вода из растаявшего в первом опыте куска, всего $M + m$. И

восемь кусков льда только нагреваются до $0\,^\circ\mathrm{C}$ — плавиться им нечем, теплоту плавления они не получают.

Проверка. Размерность: $\lambda/c_\text{в}$ — градусы, множитель при нём безразмерный. Численно при $m = 1$ кг, $M = 1{,}5$ кг: опыт 1 — $105 + 336 = 441$ кДж получено, $4{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot 70 = 441$ кДж отдано; опыт 2 — $8 \cdot 105 = 840$ кДж получено, $336 \cdot 2{,}5 = 840$ кДж отдано. Знак: $8c_\text{л}\Delta t > \lambda$, иначе восемь кусков не смогли бы заморозить даже свой бывший кусок, — здесь $840 > 336$, условие выполнено. Смысл: второй опыт — «весы», на которых взвешивается масса воды в единицах куска льда.

Ответ. $t_2 = t_0 + \dfrac{\lambda\,(c_\text{л}(t_0 - t_1) + \lambda)}{c_\text{в}(8c_\text{л}(t_0 - t_1) - \lambda)} = 70\,^\circ\mathrm{C}$.