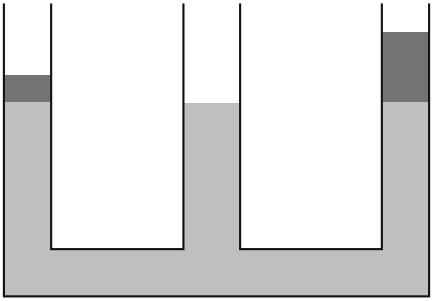
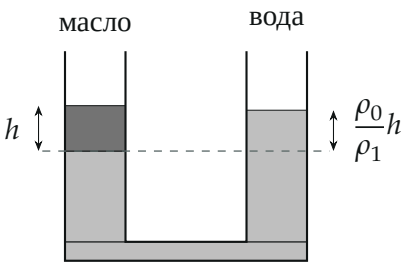
Три сосуда с маслом

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 1, задача 5] Имеются три одинаковых цилиндрических сосуда, в которое налито некоторое количество воды. Поверх воды в левый и правый сосуд аккуратно наливают слой масла — в левый сосуд толщиной $h = 3$ см, в правый — $3h$. На сколько изменятся уровни жидкости в левом, среднем и правом сосудах после установления равновесия? Известно, что при наливании масла вода из левого и правого сосудов маслом полностью не вытесняется. Плотность масла $\rho_0 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Сосуды соединены снизу. Масло давит на воду своим весом, и вода перетекает из сосудов с маслом туда, где масла меньше, пока давление у дна не станет одинаковым под всеми сосудами. Ключевые законы — равенство давлений на одном уровне в покоящейся жидкости и сохранение объёма воды. Главная идея: по давлению у дна слой масла h равен слою воды $\frac{\rho_0}{\rho_1}h$. Класс задачи — сообщающиеся сосуды с двумя жидкостями.

Обозначения. S — площадь сечения сосуда; H — начальная высота воды (одна во всех сосудах, отсчёт от дна сосудов); $x_\text{л}$, $x_\text{с}$, $x_\text{п}$ — конечные высоты воды; $\Delta h_\text{л}$, $\Delta h_\text{с}$, $\Delta h_\text{п}$ — изменения уровня верхней поверхности жидкости (масла в крайних сосудах, воды в среднем); $\varepsilon = \rho_0/\rho_1 = 0{,}9$.



Слой масла h уравновешивает слой воды $\frac{\rho_0}{\rho_1}h = 0{,}9h$: давления на уровне пунктира одинаковы

1. Равенство давлений у дна. В покоящейся жидкости давление на одном уровне одинаково, иначе вода текла бы. Запишем давление на уровне дна сосудов под каждым из них (атмосферное одинаково и сокращается) и приравняем:

$$\rho_0 g\, h + \rho_1 g\, x_{\text{л}} = \rho_1 g\, x_{\text{с}} = \rho_0 g \cdot 3h + \rho_1 g\, x_{\text{п}}.$$

Разделим на $\rho_1 g$:

$$x_{\text{л}} = x_{\text{с}} - \varepsilon h, \qquad x_{\text{п}} = x_{\text{с}} - 3\varepsilon h. \qquad (1)$$

Формулы применимы, пока вода в крайних сосудах не вытеснена полностью ($x_{\text{л}}, x_{\text{п}} > 0$) — это дано в условии.

2. Сохранение объёма воды. Вода несжимаема и никуда не девается, канал внизу заполнен водой и его объём не меняется: $S(x_{\text{л}} + x_{\text{с}} + x_{\text{п}}) = 3SH$. Подставим (1):

$$3x_{\text{с}} - 4\varepsilon h = 3H \quad \Rightarrow \quad \Delta h_{\text{с}} = x_{\text{с}} - H = \frac{4\rho_0}{3\rho_1} h = \frac{4}{3} \cdot 0{,}9 \cdot 3 \text{ см} = 3{,}6 \text{ см}.$$

Тот же результат даёт замена масла водой: всё масло $h + 3h = 4h$ по давлению равно воде $4\varepsilon h$, она растекается поровну на три сосуда — по $\frac{4}{3}\varepsilon h$.

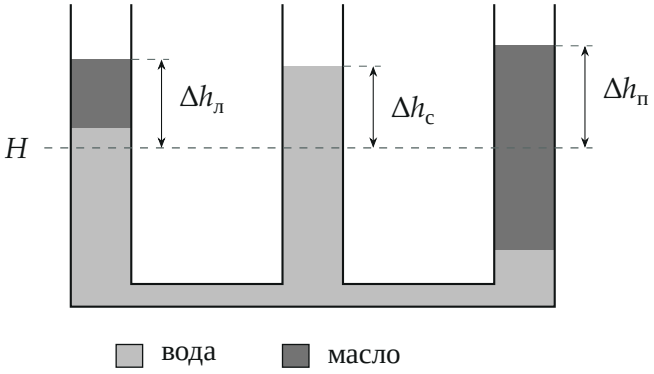
3. Уровни крайних сосудов. В крайнем сосуде верхняя поверхность — масло, она выше воды на толщину масла. Изменение уровня = изменение высоты воды + толщина масла. Из (1) $x_{\text{л}} - H = \Delta h_{\text{с}} - \varepsilon h$,

$x_п - H = \Delta h_с - 3\varepsilon h$:

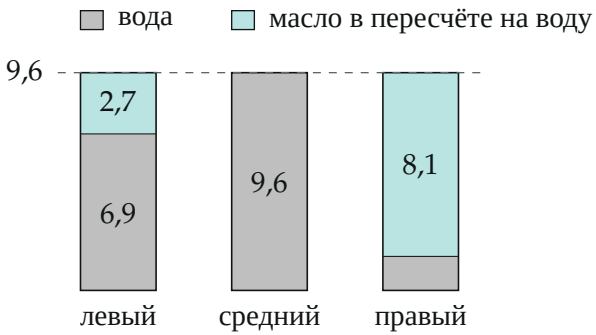
$$\Delta h_л = \frac{4}{3}\varepsilon h - \varepsilon h + h = h + \frac{\rho_0}{3\rho_1}h = 3 + 0{,}9 = 3{,}9 \text{ см},$$

$$\Delta h_п = \frac{4}{3}\varepsilon h - 3\varepsilon h + 3h = 3h - \frac{5\rho_0}{3\rho_1}h = 9 - 4{,}5 = 4{,}5 \text{ см}.$$

Знаки словами: вода в левом сосуде прибыла на 0,9 см, в среднем — на 3,6 см, а из правого ушла на 4,5 см; верхний уровень поднялся во всех трёх сосудах.



Равновесие в масштабе при начальной высоте воды $H = 6$ см: уровни поднялись на 3,9, 3,6 и 4,5 см



Давление у дна в сантиметрах водяного столба (при $H = 6$ см): вода плюс эквивалент масла дают 9,6 см под каждым сосудом; правый столбик внизу — вода 1,5 см

Обратите внимание: Δh в крайних сосудах — это подъём поверхности масла, а не воды. Вода в правом сосуде опустилась, хотя уровень жидкости в нём поднялся сильнее всех. У организаторов в исходном ответе для правого сосуда стояло 7,5 см — это опечатка: формула для $\Delta h_{\text{п}}$ даёт 4,5 см.

Проверка. Размерность: все Δh — длины. Объём: сумма подъёмов уровней, умноженная на S, равна объёму налитого масла $S\cdot 4h$: $3{,}9+3{,}6+4{,}5 = 12\text{ см} = 4h$. Предел: при $\rho_0 \to 0$ вода не перетекает, $\Delta h_{\text{л}} = h$, $\Delta h_{\text{с}} = 0$, $\Delta h_{\text{п}} = 3h$; при $\rho_0 = \rho_1$ (масло — та же вода) все уровни поднимаются на $\frac{4}{3}h = 4$ см. Смысл: масло «доливает» в систему эквивалент воды $4\varepsilon h$, который делится поровну между сосудами.

Ответ.

$$\Delta h_{\text{л}} = h + \frac{\rho_0}{3\rho_1}h = 3{,}9\text{ см}, \quad \Delta h_{\text{с}} = \frac{4\rho_0}{3\rho_1}h = 3{,}6\text{ см},$$

$$\Delta h_{\text{п}} = 3h - \frac{5\rho_0}{3\rho_1}h = 4{,}5\text{ см}$$

(все уровни поднимаются).