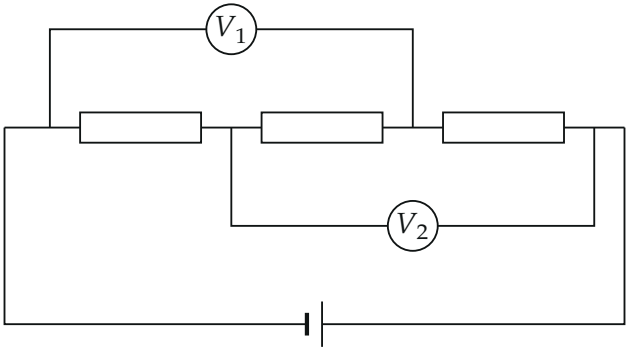
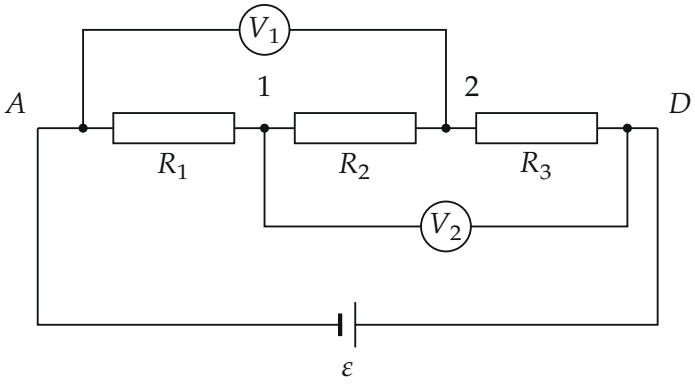
Неидеальные вольтметры

Задача 1. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 2, задача 1] В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, три одинаковых резистора соединены последовательно и подключены к батарейке с ЭДС $\varepsilon = 6$ В. Два одинаковых вольтметра, подключенных так, как показано на рисунке, показывают напряжение $U = 3$ В. Что будет показывать один из них, если второй вообще отключить от цепи? Внутреннее сопротивление источника равно нулю.



▲ **Решение. Что происходит.** Вольтметр — тоже проводник, и ток через него идёт. Если бы вольтметры были идеальными (бесконечное сопротивление), V_1 измерял бы напряжение на двух из трёх одинаковых резисторов, то есть $2\varepsilon/3 = 4$ В. Он показывает 3 В: у вольтметров конечное сопротивление, и они меняют цепь. Класс задачи — цепь с неидеальными приборами: по показаниям найдём потенциалы узлов, из них — ток через средний резистор и сопротивление вольтметра, а потом решим цепь с одним вольтметром.

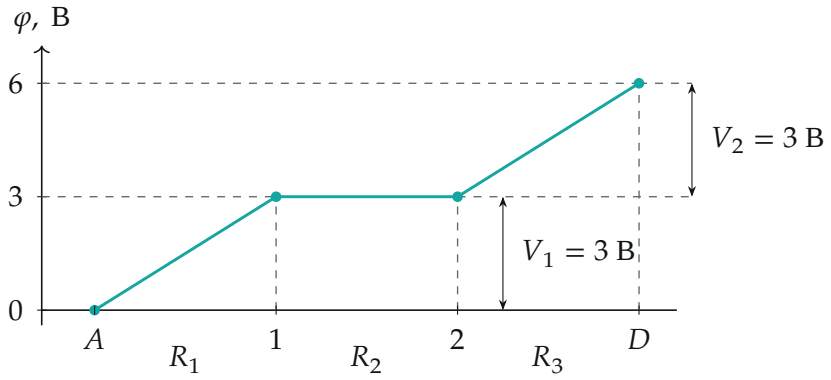
Обозначения. R — сопротивление каждого резистора, R_V — вольтметра. Узлы: A — левый вывод R_1 (отрицательный полюс батареи), 1 — между R_1 и R_2, 2 — между R_2 и R_3, D — правый конец R_3 (положительный полюс). Потенциал точки A примем за нуль, тогда $\varphi_D = \varepsilon = 6$ В (внутреннего сопротивления нет, напряжение на зажимах батареи равно ЭДС).



Узлы схемы: V_1 подключён к точкам A и 2, V_2 — к точкам 1 и D

Пункт 1.

1. Потенциалы узлов. Вольтметр показывает разность потенциалов между точками, к которым он подключён. Для V_2: $\varphi_D - \varphi_1 = 3$ В, откуда $\varphi_1 = 6 - 3 = 3$ В. Для V_1: $\varphi_2 - \varphi_A = 3$ В, откуда $\varphi_2 = 3$ В. Итак, $\varphi_1 = \varphi_2$.



Потенциал вдоль цепи: на R_1 и на R_3 падает по 3 В, на R_2 — нуль

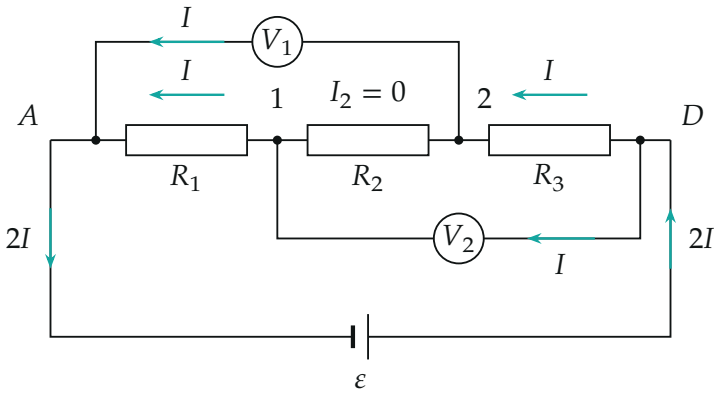
2. Ток через средний резистор. Разность потенциалов между его концами $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, поэтому по закону Ома для участка цепи $I_2 = 0$: средний резистор обесточен. Это уже следует из условия: оба вольтметра показывают ровно половину ε.

3. Сопротивление вольтметра. Запишем закон сохранения заряда для узла 1 (сумма токов в узел равна сумме токов из узла, заряд в узле

не накапливается): ток I_{R_1} приходит из D по V_2 и уходит по R_1, так как ток через R_2 равен нулю. Напряжения на обоих по 3 В, поэтому

$$I_{R_1} = \frac{3\text{ В}}{R}, \qquad I_{V_2} = \frac{3\text{ В}}{R_V} \quad \Rightarrow \quad R_V = R.$$

Для узла 2 получается то же: ток через V_1 и ток через R_3 равны, снова $R_V = R$. Значит, во всех четырёх ветвях при напряжении 3 В течёт один и тот же ток $I = 3\text{ В}/R$, а от батареи идёт $2I$.



Токи в исходной схеме: через R_2 ток не идёт, в остальных четырёх ветвях он одинаков

Пункт 2.

4. Схема с одним вольтметром. Отключим V_1 (если отключить V_2, схема переходит в эту же зеркальным образом — убедимся в проверке). Теперь через средний резистор ток течёт: после отключения прежнего баланса потенциалов нет. Между узлами 1 и D параллельно соединены вольтметр $R_V = R$ и цепочка из R_2 и R_3 сопротивлением $2R$:

$$R_{1D} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2R}{3}.$$

Участок 1–D соединён последовательно с R_1, поэтому по ним течёт один и тот же ток.

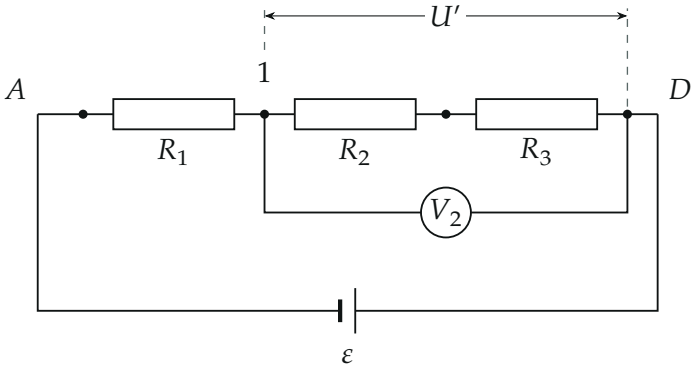
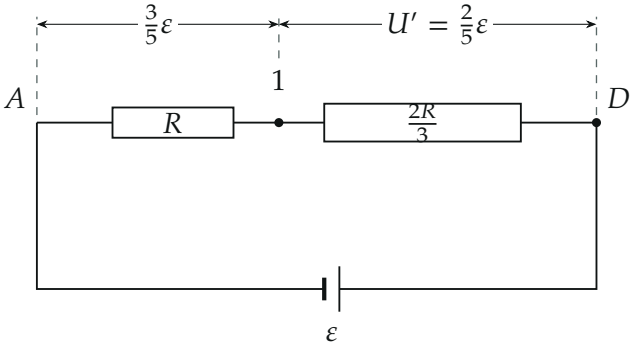


Схема после отключения V_1: V_2 показывает напряжение U' между узлами 1 и D

5. Показание V_2. Напряжение между узлами 1 и D — это и есть показание V_2 (U'). Последовательно соединённые R и $2R/3$ делят напряжение ε пропорционально сопротивлениям:

$$U' = \varepsilon\,\frac{2R/3}{R + 2R/3} = \frac{2}{5}\,\varepsilon = \frac{2}{5}\cdot 6\ \text{В} = 2{,}4\ \text{В}.$$

Показание уменьшилось с 3 до 2,4 В: после отключения V_1 ток в цепи упал, и R_1 забирает на себя $3\varepsilon/5 = 3{,}6$ В.



Эквивалентная схема: напряжение ε делится между R и $2R/3$ как 3 : 2

Обратите внимание: выбросить средний резистор можно было только в исходной схеме, где его концы на одном потенциале. После отключения вольтметра ток через R_2 идёт, и в п. 4 он учтён в цепочке $R_2 + R_3$.

Проверка. Второй способ: отключим вместо V_1 вольтметр V_2. Тогда V_1 стоит параллельно участку $R_1 + R_2 = 2R$, сопротивление этой пары $2R/3$, последовательно с ней — R_3, и показание снова $2\varepsilon/5 = 2{,}4$ В: схема симметрична, ответ не зависит от того, какой вольтметр убрали.

Предел: при $R_V \to \infty$ (идеальный вольтметр) делитель даёт $\varepsilon \cdot 2R/3R = 4$ В, как в начале «Что происходит»; конечное $R_V = R$ шунтирует участок и снижает показание до 2,4 В, как и должно быть. Численный расчёт всей схемы узловыми потенциалами даёт те же 3 В при двух вольтметрах и 2,4 В при одном.

Ответ. $R_V = R$; оставшийся вольтметр покажет $U' = \dfrac{2}{5}\,\varepsilon = 2{,}4$ В.