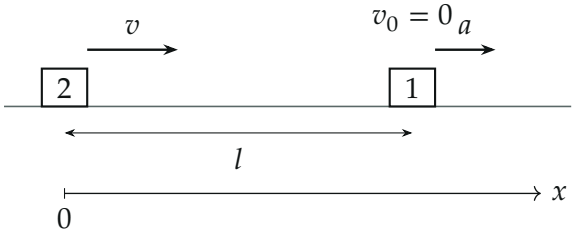
Догоняющее тело

Задача 2. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 2, задача 2] Два тела, расстояние между которыми l, начинают двигаться одновременно в одном направлении: первое из состояния покоя равноускоренно с ускорением a, второе, догоняющее первое, равномерно со скоростью v. При каком минимальном значении v второе тело догонит первое?



Поясняющий рисунок: тело 2 догоняет тело 1, начало координат — в начальном положении тела 2

▲ **Решение.** **Что происходит.** В начале второе тело быстрее первого ($v > 0$), и расстояние между ними сокращается. Но первое разгоняется, и с момента, когда его скорость сравняется с v, расстояние начинает расти. Значит, догнать можно только до этого момента. Минимальная скорость — та, при которой тела встречаются ровно в момент равенства скоростей: второе тело «касается» первого и снова отстаёт. Ключевой закон — кинематика равноускоренного и равномерного движения. Класс задачи — условие встречи: квадратное уравнение должно иметь корень.

Обозначения. Ось x — по направлению движения, начало — в начальном положении второго тела; $x_1(t)$, $x_2(t)$ — координаты тел; $d(t) = x_1 - x_2$ — расстояние между ними.

1. Законы движения. Первое тело стартует из $x = l$ без начальной скорости с ускорением a, второе — из $x = 0$ с постоянной скоростью v:

$$x_1(t) = l + \frac{at^2}{2}, \qquad x_2(t) = vt.$$

2. Условие встречи. Встреча — это момент $t \geq 0$, когда $x_1(t) = x_2(t)$:

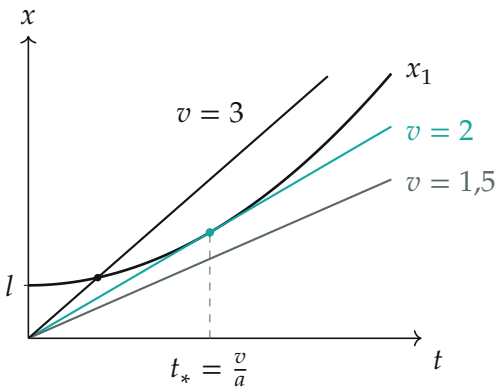
$$\frac{at^2}{2} - vt + l = 0. \qquad (*)$$

Квадратное уравнение $(*)$ имеет действительный корень, только если его дискриминант неотрицателен:

$$v^2 - 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot l \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{2al}.$$

При этом корни $t = \dfrac{v \pm \sqrt{v^2 - 2al}}{a}$ положительны (их сумма $2v/a > 0$, произведение $2l/a > 0$), так что встреча действительно происходит после старта. Минимальная скорость

$$v_{\min} = \sqrt{2al}.$$



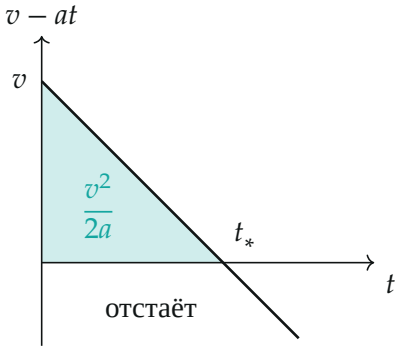
Графики $x(t)$ в масштабе при $a = 1$, $l = 2$ (тогда $v_{\min} = 2$): прямая $v = 2$ касается параболы, $v = 1{,}5$ проходит ниже, $v = 3$ пересекает

3. Второй способ — через относительную скорость. Перейдём в систему отсчёта первого тела: в ней второе тело стартует с расстояния l со скоростью v и тормозится с ускорением a (ускорение первого тела, взятое с обратным знаком). Скорость сближения $v - at$ падает до нуля

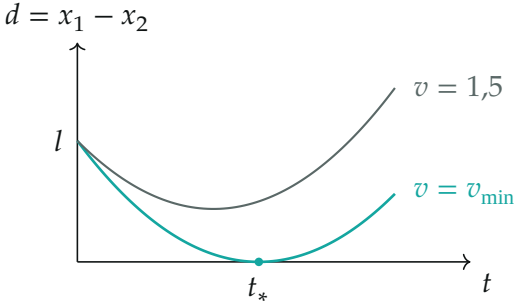
за время $t_* = v/a$. За это время второе тело приближается к первому на площадь под графиком скорости сближения — треугольник:

$$s_{\text{сбл}} = \frac{v \cdot t_*}{2} = \frac{v^2}{2a}.$$

После t_* расстояние растёт. Догнать — значит сблизиться не меньше чем на l: $v^2/(2a) \geq l$, откуда снова $v \geq \sqrt{2al}$.



Скорость сближения тел: площадь треугольника — наибольшее сближение $v^2/(2a)$



Расстояние между телами: при $v = v_{\min}$ оно в момент t_* обращается в ноль и снова растёт; при меньшей скорости минимум положителен

Обратите внимание: при $v = v_{\min}$ тела встречаются в момент $t_* = \sqrt{2l/a}$, когда их скорости равны, $at_* = v$. Если бы скорость первого тела к встрече уже превысила v, расстояние до встречи успело бы начать расти — поэтому минимальный случай и есть касание.

Проверка. Размерность: $\sqrt{a\,l}$ — $\sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}$. Пределы: при $a \to 0$ первое тело стоит, и догнать можно с любой скоростью, $v_{\min} \to 0$; при $l \to 0$ тела стартуют рядом, $v_{\min} \to 0$. Численно на графике: $a = 1$, $l = 2$, $v = 2$ — уравнение $(*)$ $t^2/2 - 2t + 2 = 0$ имеет двойной корень $t = 2$. Смысл: за время, пока первое тело разгоняется до v, второе должно отыграть всё начальное отставание l.

Ответ. $v_{\min} = \sqrt{2al}$.