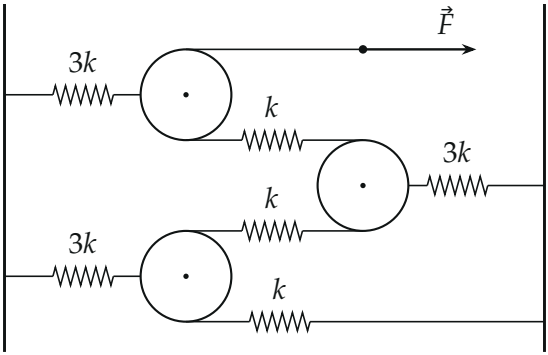
Пружины и три блока

Задача 3. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, комплект 2, задача 3] Три одинаковые пружины с коэффициентами жёсткости k связаны кусками невесомой нерастяжимой нити. Полученная нить переброшена через три невесомых блока, привязанных к вертикальным стенам с помощью одинаковых пружин с коэффициентами жёсткости $3k$ (см. рисунок). На конец нити действуют силой F. Насколько переместится при этом конец нити?



▲ **Решение. Что происходит.** Нить с вставленными пружинами k идёт от конца, к которому приложена сила F, вокруг трёх блоков и закреплена на правой стене. Конец нити уходит по двум причинам: растягиваются три пружины k, вставленные в нить, и смещаются три блока, растягивая свои пружины $3k$, — при этом нить, обогнувшая блок, «освобождается» с двух сторон. Ключевые законы — закон Гука, условие равновесия невесомого блока и нерастяжимость нити. Класс задачи — система пружин и блоков: сила через натяжение, перемещение через длину нити.

Обозначения. T — натяжение нити; Δx — удлинение каждой пружины k; Δx_1 — удлинение каждой пружины $3k$, оно же смещение блока; Δl — перемещение конца нити. Все куски нити горизонтальны.

1. Натяжение и пружины k. Нить и блоки невесомы, трения в блоках нет, поэтому натяжение одно по всей длине нити и равно приложенной силе: $T = F$. Пружина k вставлена в нить, через неё передаётся то же

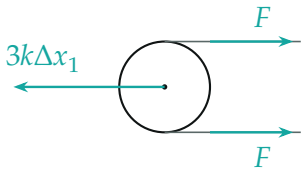
натяжение, и по закону Гука

$$k\,\Delta x = F \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{k}.$$

Три пружины k удлиняют путь нити на $3\Delta x = \dfrac{3F}{k}$.

2. Пружины $3k$. Запишем условие равновесия невесомого блока: сумма сил на него равна нулю (масса нулевая, поэтому это верно и в движении). Нить огибает блок, и оба её куска тянут блок в одну сторону, каждый с силой F; пружина $3k$ тянет в другую. В проекции на горизонталь:

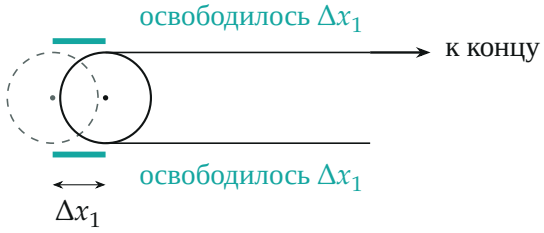
$$3k\,\Delta x_1 = 2F \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = \frac{2F}{3k}.$$



Силы на левый верхний блок: два куска нити тянут вправо по F, пружина $3k$ — влево; у остальных блоков так же

3. Сколько нити освобождает блок. Блок сместился на Δx_1 в сторону, куда уходят оба куска нити. Каждый из двух кусков между этим блоком и соседними точками стал короче на Δx_1, всего $2\Delta x_1$, — эта нить уходит к концу. Три блока дают

$$3 \cdot 2\Delta x_1 = 6 \cdot \frac{2F}{3k} = \frac{4F}{k}.$$

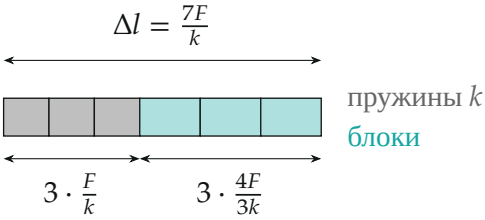


Блок сдвинулся на Δx_1 (пунктир — прежнее положение): оба куска нити укоротились, к концу ушло $2\Delta x_1$

4. Перемещение конца. Нить нерастяжима, поэтому весь прирост длины «пружинного пути» и вся освобождённая у блоков нить уходят к концу:

$$\Delta l = 3\Delta x + 6\Delta x_1 = \frac{3F}{k} + \frac{4F}{k} = \frac{7F}{k}.$$

Конец смещается по направлению силы F.



Из чего складывается Δl (в масштабе): пружины в нити дают $3F/k$, блоки — $4F/k$

Обратите внимание: смещение блока даёт конец вдвое больше самого смещения — нить огибает блок и укорачивается с двух сторон. Ошибка — считать вклад блока равным Δx_1; тогда получилось бы $3F/k + 2F/k = 5F/k$.

Проверка. Размерность: F/k — длина. Пределы: если пружины $3k$ заменить жёсткими креплениями ($3k \to \infty$), останется $3F/k$ — три пружины k последовательно; если нить без пружин k (k в нити $\to \infty$), останется вклад блоков. Второй способ — энергия: если тянуть медленно,

сила на конце растёт от нуля до F пропорционально смещению, её работа $\frac{1}{2}F\Delta l$ целиком переходит в энергию шести пружин:

$$\frac{1}{2}F\Delta l = 3\cdot\frac{k\Delta x^2}{2} + 3\cdot\frac{3k\Delta x_1^2}{2} = \frac{3F^2}{2k} + \frac{2F^2}{k} = \frac{7F^2}{2k} \quad\Rightarrow\quad \Delta l = \frac{7F}{k}.$$

Смысл: вся система ведёт себя как одна пружина жёсткостью $k/7$.

Ответ. $\Delta l = \dfrac{7F}{k}$.