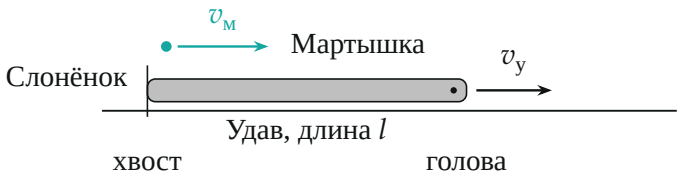
Мартышка измеряет удава

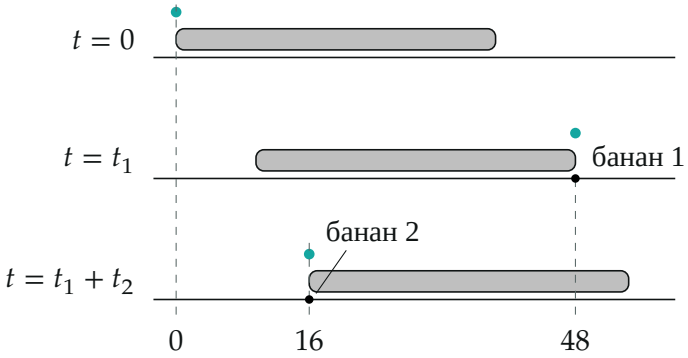
Задача 4. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, площадка 2, задача 4] Слоненок и Мартышка измеряют длину Удава, который проползал мимо них. В тот момент, когда около них был хвост Удава, Мартышка побежала к его голове и, добежав, положила на землю в ту точку, где находилась голова Удава, банан. Затем она побежала обратно и положила второй банан рядом с кончиком хвоста Удава (который продолжал ползти). Потом пришёл Попугай и измерил расстояния от Слоненка (который всё время стоял на месте) до бананов в «попугаях». Эти расстояния оказались равны 48 попугаев и 16 попугаев. Найти отношение скорости Мартышки к скорости Удава и длину Удава в попугаях.



Поясняющий рисунок: начальный момент, хвост Удава около Слонёнка

▲ **Решение. Что происходит.** Мартышка бежит вдоль ползущего Удава сначала к голове, потом обратно к хвосту. Относительно Удава она оба раза пробегает одно и то же расстояние l — его длину, но со скоростями $v_м - v_у$ (догоняет голову) и $v_м + v_у$ (хвост ползёт навстречу). Бананы же отмечают путь Мартышки относительно земли. Главная идея — считать время в системе отсчёта Удава, а путь — в системе отсчёта земли. Класс задачи — сложение скоростей (относительное движение).

Обозначения. Ось x — вдоль земли по направлению движения Удава, начало — у Слонёнка; l — длина Удава; $v_у$, $v_м$ — скорости Удава и Мартышки относительно земли (постоянные); t_1 — время бега к голове, t_2 — время бега обратно; $x_1 = 48$, $x_2 = 16$ — координаты бананов в попугаях (П).



Три момента в масштабе (найденные $l = 38{,}4$ П, $v_м = 5v_у$); бирюзовая точка — Мартышка, чёрные точки — бананы

1. Бег к голове. Перейдём в систему отсчёта Удава: в ней Удав неподвижен, и сразу видно, что пробежать надо ровно l. По закону сложения скоростей скорость Мартышки относительно Удава $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_м - \vec{v}_у$; Мартышка и Удав движутся в одну сторону, поэтому в проекции на ось x

$$v_{отн} = v_м - v_у, \qquad t_1 = \frac{l}{v_м - v_у}.$$

Догнать голову Мартышка может только при $v_м > v_у$. Относительно земли за это время она пробежала $v_м t_1$ от Слонёнка, и там лёг первый банан:

$$\frac{v_м\, l}{v_м - v_у} = 48 \text{ П}. \qquad (1)$$

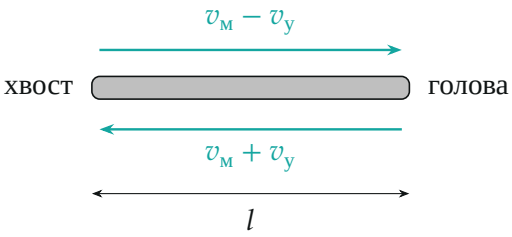
2. Бег обратно. Теперь Мартышка бежит против оси x, а Удав — по оси, поэтому проекция скорости Мартышки относительно Удава $-v_м - v_у$, по модулю $v_м + v_у$. Снова надо пробежать относительно Удава всю длину l:

$$t_2 = \frac{l}{v_м + v_у}.$$

Относительно земли Мартышка сместилась назад на $v_м t_2$ — от первого

банана ко второму, то есть на $48 - 16 = 32$ П:

$$\frac{v_м\, l}{v_м + v_у} = 32\ \text{П}. \qquad (2)$$



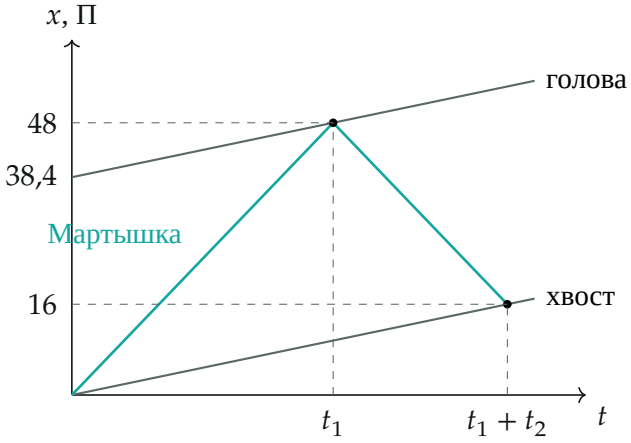
В системе отсчёта Удава он стоит, и Мартышка пробегает его длину l туда и обратно с разными относительными скоростями

3. Решаем систему. Неизвестных два, l и отношение $n = v_м/v_у$. Делением (1) на (2) уходит l:

$$\frac{v_м + v_у}{v_м - v_у} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(n+1) = 3(n-1) \quad \Rightarrow \quad n = 5.$$

Подставим в (1): $l = 48 \cdot \dfrac{n-1}{n} = 48 \cdot \dfrac{4}{5} = 38{,}4$ П.

4. Проверка вторым способом — по хвосту. Второй банан лежит там, где в этот момент хвост, а хвост всё время полз со скоростью $v_у$ от Слонёнка. Значит, $x_2 = v_у(t_1 + t_2)$. Возьмём $v_у = 1$ П за единицу времени: $t_1 = 38{,}4/4 = 9{,}6$, $t_2 = 38{,}4/6 = 6{,}4$, $x_2 = 16$ П — совпадает с условием. Это же видно на графике: линия Мартышки возвращается и встречает линию хвоста ровно на высоте 16.



Графики $x(t)$ относительно земли в масштабе при $v_y = 1$: Мартышка встречает голову при $x = 48$ и хвост при $x = 16$

Обратите внимание: 48 и 16 — координаты бананов относительно земли, а не пути относительно Удава. Путь Мартышки на обратном участке — разность $48 - 16 = 32$ П, а длина Удава 38,4 П не совпадает ни с одним из этих чисел.

Проверка. В (1) и (2) обе части — длины. Предел: при $v_\text{у} \to 0$ Удав стоит, оба пути равны l, и бананы легли бы в l и 0; у нас бананы разошлись, потому что Удав ползёт. Смысл: туда Мартышка бежит дольше (догоняет), обратно — быстрее (встречное движение), и отношение путей 3 : 2 однозначно задаёт отношение скоростей.

Ответ. $\dfrac{v_\text{м}}{v_\text{у}} = 5$; $l = 38{,}4$ попугая.