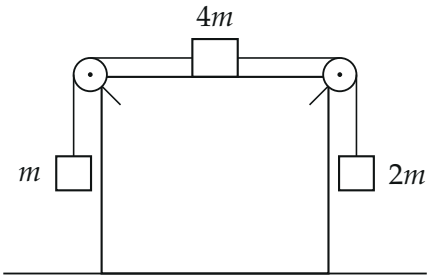
Куб с блоками и грузами

Задача 5. [Росатом 2016/17, заключительный этап, 9 класс, площадка 2, задача 5] На горизонтальной опоре находится куб, на котором укреплены два блока. Через блоки перекинута нить с грузами массами m, $4m$ и $2m$. Какой горизонтальной силой надо действовать на куб, чтобы он покоился? Трение между кубом и опорой отсутствует; коэффициент трения между верхним телом и кубом — k.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Груз $2m$ тяжелее груза m, поэтому нить тянет верхнее тело $4m$ вправо, а трение о куб — влево. Если трение покоя может удержать перевес $2mg - mg = mg$, все тела стоят; если нет — три тела едут с одним ускорением, и тело $4m$ своим трением и нити через блоки толкают куб. Ключевые законы — второй закон Ньютона для каждого груза и условие равновесия куба. Главная идея: силу F проще всего найти из второго закона Ньютона для всей системы «куб + блоки + три груза» по горизонтали. Класс задачи — связанные тела с трением, сначала выясняем, есть ли проскальзывание.

Обозначения. T_1 — натяжение левой нити (к грузу m), T_2 — правой (к грузу $2m$); a — модуль ускорения грузов (куб покоится, поэтому это и ускорение относительно куба); $F_{\text{тр}}$ — сила трения между телом $4m$ и кубом. Оси: для груза m — вверх, для тела $4m$ — вправо, для груза $2m$ — вниз, то есть каждая — по направлению его движения. Блоки и нити невесомы, трения в блоках нет, поэтому натяжение вдоль каждого куска нити одно.

1. Есть ли проскальзывание. Пусть тела покоятся. Тогда $T_1 = mg$, $T_2 = 2mg$, и второй закон Ньютона для тела $4m$ в проекции на горизонталь требует силы трения покоя $T_2 - T_1 = mg$, направленной влево. Трение покоя не больше $kN = 4kmg$ (тело $4m$ по вертикали в равновесии, $N = 4mg$). Покой возможен при $mg \le 4kmg$, то есть при $k \ge \frac{1}{4}$. Тогда ни один груз не движется, на куб по горизонтали действуют T_1 вправо, T_2 влево и трение mg вправо — их сумма ноль, и $F = 0$.

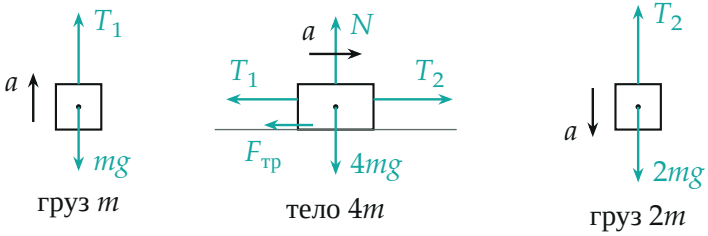
2. Ускорение при $k < \frac{1}{4}$. Тело $4m$ скользит вправо, трение скольжения $F_{\text{тр}} = k \cdot 4mg$ направлено влево. Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на его ось:

$$\begin{aligned} &\text{груз } m: && ma = T_1 - mg,\\ &\text{тело } 4m: && 4ma = T_2 - T_1 - 4kmg,\\ &\text{груз } 2m: && 2ma = 2mg - T_2. \end{aligned}$$

Сложим уравнения — натяжения уйдут (это внутренние силы системы грузов):

$$7ma = 2mg - mg - 4kmg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(1-4k)\,g}{7}.$$

Отсюда $T_1 = m(g+a) = \dfrac{8-4k}{7}\,mg$, $T_2 = 2m(g-a) = \dfrac{12+8k}{7}\,mg$.



Силы на каждый груз при $k < \frac{1}{4}$; ускорение каждого — вдоль его нити

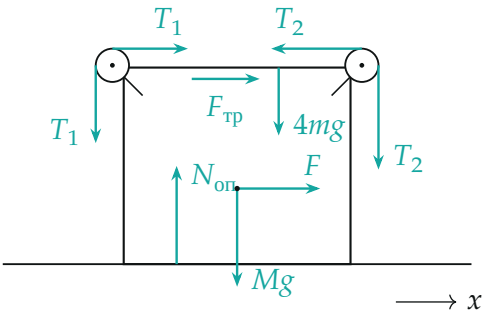
3. Равновесие куба. Нить действует на куб через блоки: на левый блок она тянет вправо (кусок к телу $4m$) и вниз (кусок к грузу m), каждый раз с силой T_1; на правый — влево и вниз с силой T_2. Тело $4m$ давит

на куб вниз с силой $4mg$ и по третьему закону Ньютона тянет его трением вправо с силой $F_{тр}$. Опора гладкая — от неё только вертикальная $N_{оп}$. Запишем условие равновесия куба в проекции на горизонтальную ось x вправо (вертикальные силы в неё не входят):

$$T_1 - T_2 + F_{тр} + F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = T_2 - T_1 - 4kmg = 4ma.$$

Последнее равенство — второе уравнение системы из пункта 2. Знак словами: $F_x > 0$, сила направлена вправо, в сторону тяжёлого груза $2m$. Без неё нить через блоки тянула бы куб влево с силой $T_2 - T_1 = (4 + 12k)mg/7$, а трение вправо — только с силой $4kmg$, и куб поехал бы влево. Модуль силы

$$F = 4ma = \frac{4(1 - 4k)}{7}\,mg.$$



Силы на куб с блоками (M — его масса); для ответа нужны только горизонтальные: T_1, T_2, $F_{тр}$ и F

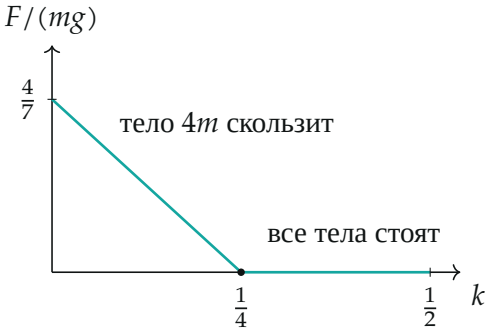
4. Второй способ — система целиком. Возьмём систему «куб + блоки + нить + три груза». Натяжения нитей, трение и давление тела на куб — внутренние силы. Внешние горизонтальные силы — только искомая F_x: опора гладкая, тяжесть и реакция опоры вертикальны. Второй закон Ньютона для системы в проекции на x: сумма внешних сил равна сумме произведений масс на проекции ускорений. Куб стоит, грузы m и $2m$ движутся вертикально, по горизонтали ускоряется только тело $4m$

— вправо:

$$F_x = 4m \cdot a = \frac{4(1-4k)}{7}\,mg > 0.$$

Тот же ответ и то же направление — вправо — без расчёта сил на блоки.

Обратите внимание: направление силы легко перепутать. Кажется, что тело $4m$ «тащит» куб трением вправо и держать его надо влево. Но через блоки нить тянет куб влево сильнее, чем трение вправо, поэтому удерживающая сила направлена вправо. Второй способ это подтверждает: внешняя сила системы направлена туда же, куда ускорение её единственной ускоряющейся по горизонтали части. У организаторов на рисунке F направлена влево; модуль у них тот же.



Нужная сила F в зависимости от коэффициента трения: линейно убывает до нуля при $k = \frac{1}{4}$, дальше равна нулю

Проверка. Размерность: mg — сила. При $k = 0$ (гладкий куб) $a = g/7$ и $F = \frac{4}{7}mg$; при $k \to \frac{1}{4}$ $F \to 0$ и ответ непрерывно переходит в $F = 0$ из пункта 1. Численно при $k = 0{,}1$: $a = 0{,}0857g$, $T_1 = 1{,}0857mg$, $T_2 = 1{,}8286mg$, $T_2 - T_1 - 0{,}4mg = 0{,}343mg = 4ma$. Смысл: внешняя сила нужна ровно для того, чтобы сообщить ускорение a единственному телу, которое ускоряется по горизонтали, — телу $4m$.

Ответ. $F = \dfrac{4mg\,(1-4k)}{7}$, направлена горизонтально в сторону более тяжёлого груза $2m$, при $k < \frac{1}{4}$; $F = 0$ при $k \geq \frac{1}{4}$.