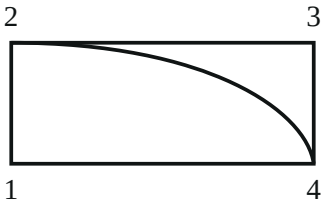
Тепловой поток в стержнях

Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 3] Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения, причем длины сторон прямоугольника относятся как 1-2 : 1-4 = 1 : 2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1-2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$, $t_3 = 0\,^\circ\text{C}$. Найти температуры вершин 2 и 4? **Указание.** Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье). Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на стационарную теплопроводность. Температуры вершин 1 и 3 держат постоянными, через некоторое время всё устанавливается, и температуры вершин 2 и 4 перестают меняться. Тогда в каждую из этих вершин за единицу времени приходит столько же тепла, сколько уходит, — это уравнение теплового баланса для вершины (точный аналог правила Кирхгофа для узла цепи, где роль тока играет тепловой поток, а роль напряжения — разность температур). Тепловой поток по стержню даёт закон Фурье.

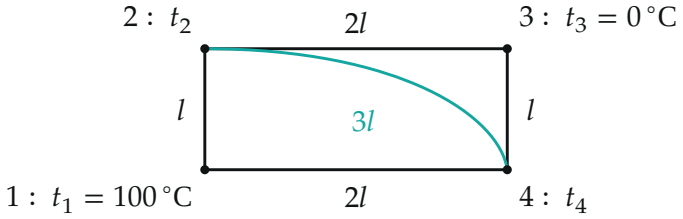
Обозначения. l — длина стержня 1-2; $\varkappa$ — теплопроводность материала, S — сечение; q_{ij} — тепловой поток (теплота за единицу времени) по стержню от вершины i к вершине j; t_2, t_4 — искомые температуры.

1. Закон Фурье для стержней. Боковые поверхности теплоизолированы, поэтому тепло идёт только вдоль стержня, и поток по стержню

длиной L между концами с температурами t_i и t_j равен

$$q_{ij} = \varkappa S \frac{t_i - t_j}{L}.$$

Длины стержней: 1-2 и 3-4 — l; 2-3 и 1-4 — $2l$; кривой 2-4 — $3l$. Важна именно длина кривого стержня, а не расстояние между вершинами 2 и 4. Чем длиннее стержень, тем хуже он проводит тепло: как сопротивление проводника, «тепловое сопротивление» стержня пропорционально его длине.



Длины стержней и неизвестные температуры; кривой стержень 2-4 (бирюзой) имеет длину $3l$

2. Баланс тепла в вершине 2. Тепло приходит от горячей вершины 1 и уходит к холодной вершине 3 и (если $t_2 > t_4$) к вершине 4. Стационарность:

$$q_{12} = q_{23} + q_{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}.$$

Умножим на $6l$ и соберём неизвестные справа:

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2t_4. \qquad (1)$$

3. Баланс тепла в вершине 4. Сюда тепло приходит от вершины 1 и по кривому стержню от вершины 2, уходит — к вершине 3:

$$q_{14} + q_{24} = q_{43} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l} = \frac{t_4 - t_3}{l},$$

$$3t_1 + 6t_3 = -2t_2 + 11t_4. \qquad (2)$$

Знак потока заранее угадывать не нужно: если окажется $t_2 < t_4$, поток q_{24} просто выйдет отрицательным.

4. Решаем систему. Сложим (1) и (2): $9(t_1 + t_3) = 9(t_2 + t_4)$, то есть

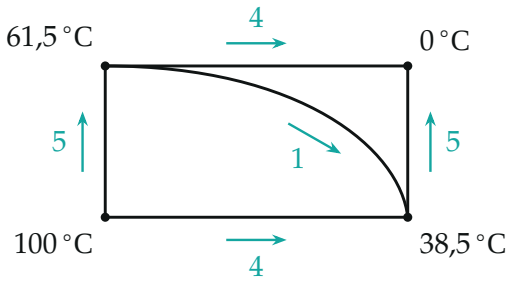
$$t_2 + t_4 = t_1 + t_3.$$

Вычтем (2) из (1): $3(t_1 - t_3) = 13(t_2 - t_4)$, то есть $t_2 - t_4 = \frac{3}{13}(t_1 - t_3)$. Отсюда

$$t_2 = \frac{8t_1 + 5t_3}{13} = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} \approx 61{,}5\,^\circ\text{C},$$

$$t_4 = \frac{5t_1 + 8t_3}{13} = \frac{45t_1 + 72t_3}{117} \approx 38{,}5\,^\circ\text{C}.$$

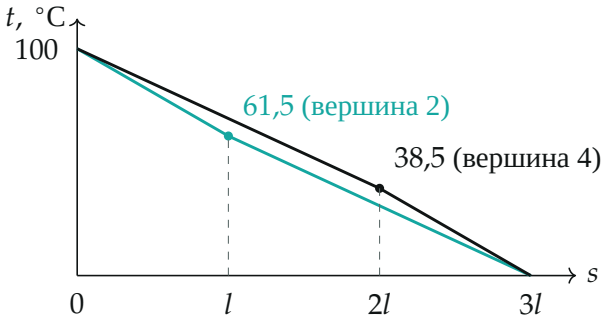
Знак: $t_2 > t_4$ — тепло по кривому стержню идёт от 2 к 4, как и предполагали в шаге 2.



Установившиеся температуры и тепловые потоки в единицах $\frac{\varkappa S}{l} \cdot \frac{100\,^\circ C}{13}$: в вершине 2 приходит 5, уходит 4 + 1; в вершине 4 приходит 4 + 1, уходит 5

5. Второй способ — симметрия. Повернём прямоугольник на 180° вокруг его центра: вершины 1 и 3, 2 и 4 поменяются местами, стержни перейдут в стержни той же длины (1-2 в 3-4, 2-3 в 4-1, кривой 2-4 — сам в себя, если он симметричен; для теплопроводности важна только длина). Одновременно «перевернём» шкалу температур: $t \to t_1 + t_3 - t$, тогда t_1 и t_3 тоже поменяются местами. Задача перешла сама в себя, значит, $t_4 = t_1 + t_3 - t_2$. Подставим в (1):

$$6t_1 + 3t_3 = 11t_2 - 2(t_1 + t_3 - t_2) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{8t_1 + 5t_3}{13} \text{ — то же.}$$



Температура вдоль пути s от вершины 1 к вершине 3: через вершину 2 (бирюзой) и через вершину 4; внутри каждого стержня температура линейна

Обратите внимание: в уравнения входит длина кривого стержня $3l$, а не расстояние $\sqrt{5}\,l$ между вершинами 2 и 4: тепло идёт по стержню.

Проверка. Размерность: t_2 и t_4 — взвешенные средние t_1 и t_3 (сумма коэффициентов $\frac{8}{13}+\frac{5}{13}=1$) — градусы, и обе лежат между 0 и 100 °C. Баланс в вершине 2 по найденным числам: $\frac{100-61{,}5}{1}=38{,}5$; $\frac{61{,}5-0}{2}+\frac{61{,}5-38{,}5}{3}=30{,}8+7{,}7=38{,}5$ — сходится. Предел: без кривого стержня каждая сторона — отдельный путь длиной $3l$, и $t_2=t_1-\frac{1}{3}(t_1-t_3)\approx 66{,}7$ °C. Кривой стержень отводит часть тепла от более горячей вершины 2 к вершине 4, поэтому t_2 ниже: $61{,}5<66{,}7$.

Смысл: вершины 2 и 4 устроены одинаково, только «зеркально» по отношению к горячей и холодной вершинам, поэтому их температуры симметричны относительно 50 °C.

Ответ. $t_2=\dfrac{72t_1+45t_3}{117}\approx 61{,}5\,^\circ\text{C}$; $t_4=\dfrac{45t_1+72t_3}{117}\approx 38{,}5\,^\circ\text{C}$.