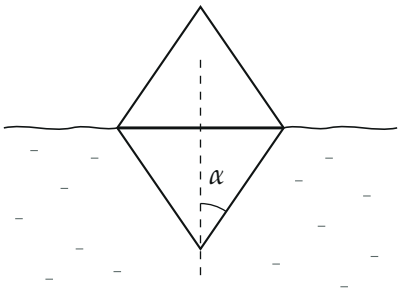
Буй из двух конусов

Задача 5. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 10 класс, задача 5] Буй составлен из двух одинаковых металлических конусов с высотой $h = 1$ м и углом при вершине $\alpha = 20°$ (см. рисунок). Буй плавает в воде в вертикальном положении, погрузившись в воду до половины. Через щели внутрь буя просачивается вода, выходит воздух, и буй медленно погружается в воду. Будет ли меняться разность уровней воды внутри и снаружи буя в процессе его погружения в воду? Найти разность уровней воды внутри и снаружи буя в тот момент времени, когда она будет минимальной. Толщиной стенок буя пренебречь. **Указание.** Объем прямого кругового конуса определяется соотношением $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, где R — радиус основания конуса, h — его высота.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на закон Архимеда для тела с переменной «начинкой». Вода внутри буя весит ровно столько, сколько весит вытесненная ею вода снаружи, поэтому она на плавучесть не влияет: буй держит только тот объём своей подводной части, где воды внутри нет — воздух между уровнем воды внутри и уровнем снаружи. Этот объём постоянен, а высота слоя зависит от того, на какой ширине буя он лежит. Класс задачи — плавание плюс геометрический экстремум.

Обозначения. Ось буя вертикальна, отсчёт — от средней (самой широкой) плоскости буя, вверх положительно. M — масса буя; ρ — плотность воды; $R = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — радиус средней плоскости (α — угол между осью и образующей, как на рисунке); a — высота уровня воды снаружи над средней плоскостью, b — глубина уровня воды внутри под ней;

$\Delta = a + b$ — разность уровней; $k = \frac{1}{3}\pi \operatorname{tg}^2 \alpha$, так что объём конуса высоты y равен ky^3.

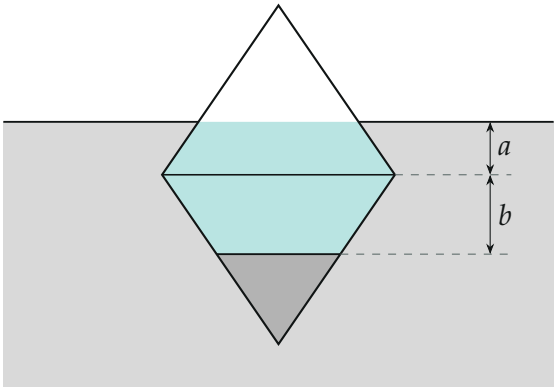
1. Условие плавания. Буй с водой внутри неподвижен (погружается медленно), второй закон Ньютона в проекции на вертикаль: сила тяжести буя и воды в нём равна силе Архимеда,

$$(M + m)g = \rho g\,(V_{\text{в}} + V_{\text{возд}}),$$

где m — масса воды в буе, $V_{\text{в}}$ — занятый ею объём (он весь под водой, ниже уровня a), $V_{\text{возд}}$ — подводный объём буя без воды. Стенки тонкие: $m = \rho V_{\text{в}}$, и

$$M = \rho V_{\text{возд}}.$$

Вначале воды нет и буй погружён наполовину: $M = \rho \cdot kh^3$. Значит, всё время погружения $V_{\text{возд}} = kh^3$ — объём половины буя.



Произвольный момент: воздух под водой (бирюзой) между уровнем внутри (глубина b) и уровнем снаружи (высота a); его объём всегда равен объёму половины буя

2. Объём слоя через уровни. Слой от $-b$ до a состоит из нижнего куска (от средней плоскости вниз на b) и верхнего (вверх на a). Нижний кусок — нижний конус без маленького конуса высоты $h - b$ у вершины, верхний — аналогично:

$$V_{\text{возд}} = k\left[h^3 - (h-b)^3\right] + k\left[h^3 - (h-a)^3\right] = kh^3,$$

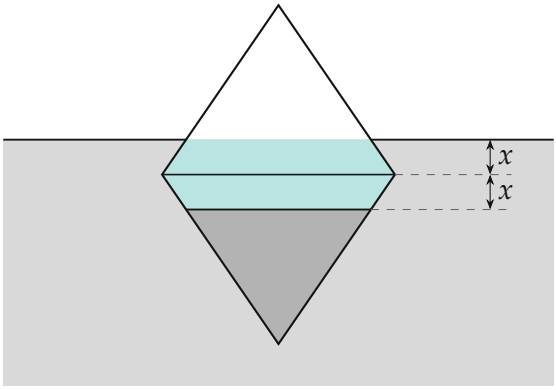
$$(h-a)^3+(h-b)^3=h^3. \qquad (1)$$

3. Меняется ли разность уровней. В начале $a=0$, и из (1) $b=h$: $\Delta=h$. Когда буй уйдёт под воду до верхней вершины, $a=h$, и $b=0$: снова $\Delta=h$. В промежутке слой лежит у широкой середины буя, и тот же объём помещается в более тонкий слой: $\Delta<h$. Значит, разность уровней меняется — сначала уменьшается, потом растёт.

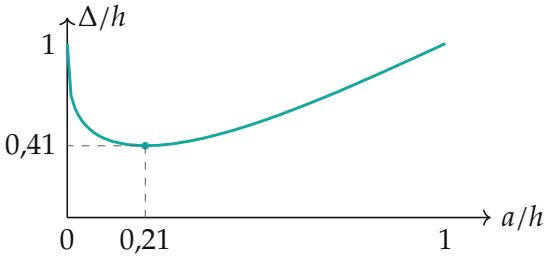
4. Минимум. Обозначим $u=h-a$, $w=h-b$; тогда $\Delta=2h-(u+w)$ при условии $u^3+w^3=h^3$. Минимум Δ — максимум суммы $u+w$. При фиксированной сумме кубов сумма максимальна при $u=w$: из неравенства о средних $\frac{u+w}{2}\le\sqrt[3]{\frac{u^3+w^3}{2}}$, равенство при $u=w$. Тогда $2u^3=h^3$, $u=h/\sqrt[3]{2}$, и

$$a=b=x=h\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \qquad \Delta_{\min}=2x=2h\,\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}\approx 0{,}41h\approx 0{,}41\text{ м}.$$

Смысл симметрии: при заданном объёме слой тоньше всего, когда он сидит на самом широком месте буя — симметрично относительно средней плоскости.



Момент минимальной разности уровней: уровни симметричны относительно средней плоскости, $x=h(1-2^{-1/3})\approx 0{,}21h$



Разность уровней по формуле (1) в зависимости от высоты наружного уровня над средней плоскостью (по вычисленным точкам): от h к минимуму $0{,}41h$ и снова к h

Обратите внимание: угол α в ответ не входит — он сокращается в (1), потому что все объёмы пропорциональны $\operatorname{tg}^2\alpha$.

Проверка. Размерность: $\Delta_{\min} = 2h(1-2^{-1/3})$ — длина. Подстановка: $u = w = 0{,}794h$, $u^3 + w^3 = 2\cdot 0{,}5h^3 = h^3$ — условие (1) выполнено. Второй способ — через сечения: при сдвиге слоя вверх на малое δ объём сохраняется, если $S(a)\,\delta_a = S(-b)\,\delta_b$; толщина не меняется в первом порядке, только когда площади сечений на двух уровнях равны, $S(a) = S(-b)$, то есть $a = b$ — тот же результат.

Смысл: «сухой» подводный объём буя держит его на плаву и не меняется; разность уровней — это толщина слоя постоянного объёма, и она минимальна там, где буй шире всего.

Ответ. Меняется: сначала уменьшается от h, затем снова растёт до h; $\Delta_{\min} = 2h\,\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}41h \approx 0{,}41$ м.