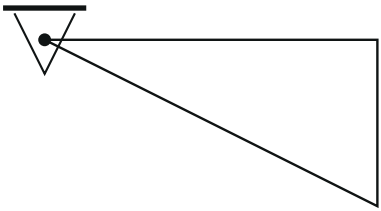
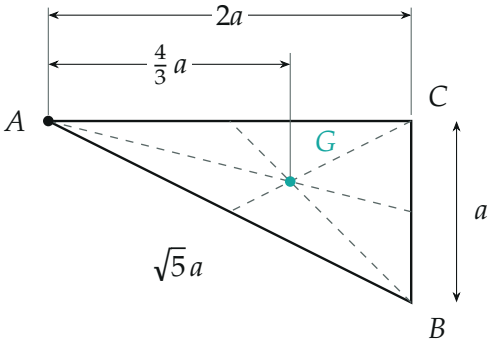
Треугольник на шарнире

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг к другу как $1:2$, подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рисунок). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого? Масса треугольника — m.



▲ **Решение. Что происходит.** Треугольник висит на шарнире и удерживается внешней силой $\vec{F}$: он неподвижен, поэтому равны нулю и сумма сил, и сумма моментов. Неизвестна ещё и сила реакции шарнира. Чтобы она не мешала, моменты берём относительно самого шарнира: линия действия реакции проходит через шарнир, её момент равен нулю, и остаётся одно уравнение — момент силы $\vec{F}$ равен моменту силы тяжести. Момент силы тяжести задан, а момент силы $\vec{F}$ равен Fd, где d — плечо. Значит, F тем меньше, чем больше плечо d. Главная идея: найти наибольшее плечо, которое может иметь сила, приложенная к треугольнику.

Обозначения. A — вершина меньшего острого угла (шарнир), C — вершина прямого угла, B — вершина большего острого угла. Меньший катет $BC = a$, больший $AC = 2a$, гипотенуза $AB = \sqrt{5}\,a$. Точка G — центр масс. Фанера однородная, поэтому масса распределена по площади равномерно.



Размеры треугольника и центр масс G — точка пересечения медиан (пунктир)

1. Условие равновесия. Для неподвижного тела сумма моментов всех сил относительно любой точки равна нулю. Возьмём точку A: реакция шарнира даёт нулевой момент, и остаются сила тяжести $m\vec{g}$ (вращает треугольник по часовой стрелке) и сила $\vec{F}$ (против часовой). Тогда

$$F\,d = mg\,\ell,$$

где d — плечо силы $\vec{F}$ (расстояние от A до линии её действия), а ℓ — плечо силы тяжести.

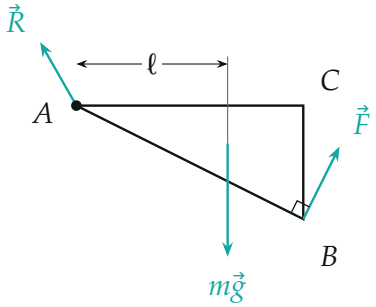
2. Плечо силы тяжести. Однородный плоский треугольник имеет центр масс в точке пересечения медиан; координата центра масс — среднее координат вершин. Ось x направим вдоль горизонтального катета от A к C: вершины имеют координаты 0, $2a$, $2a$, поэтому

$$x_G = \frac{0 + 2a + 2a}{3} = \frac{4}{3}a.$$

Проверим вторым способом. Разобьём треугольник на тонкие вертикальные полоски: высота полоски на расстоянии x от A пропорциональна x, значит, и масса полоски пропорциональна x. Среднее значение x с таким весом равно

$$x_G = \frac{\int_0^{2a} x \cdot x\,dx}{\int_0^{2a} x\,dx} = \frac{(2a)^3/3}{(2a)^2/2} = \frac{4}{3}a.$$

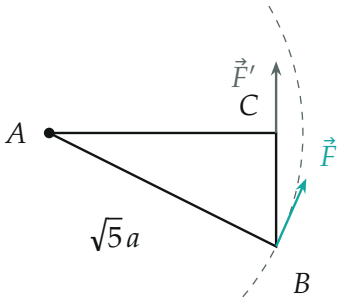
Сила тяжести направлена вертикально, поэтому её плечо — горизонтальное расстояние от A до G: $\ell = \frac{4}{3}a$, а момент $M_{mg} = \frac{4}{3}mga$.



Силы на треугольник: тяжести $m\vec{g}$, искомая $\vec{F}$ и реакция шарнира $\vec{R}$; $\vec{F} \perp AB$

3. Наибольшее плечо. Плечо силы — перпендикуляр, опущенный из A на линию действия силы. Он не длиннее отрезка от A до точки приложения P: $d \le AP$. Любая точка треугольника лежит не дальше от A, чем самая далёкая вершина (у выпуклой фигуры наибольшее расстояние достигается в вершине): $AA = 0$, $AC = 2a$, $AB = \sqrt{5}\,a$. Наибольшее — AB, поэтому

$$d \le AP \le AB = \sqrt{5}\,a.$$



Пунктир — окружность радиуса AB с центром A. Серая сила $\vec{F}'$ приложена в C вертикально, её плечо $AC = 2a < AB$

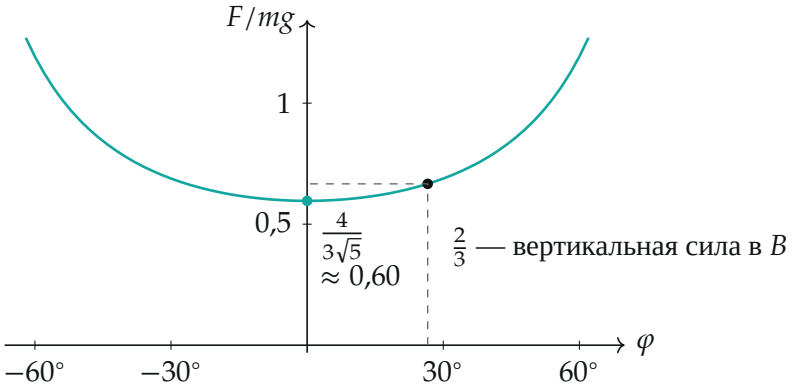
Равенство $d = AB$ возможно только в одном случае: сила приложена в вершине B и перпендикулярна AB — направлена по касательной

к окружности с центром A радиуса AB. Эта окружность (пунктир на рисунке выше) содержит весь треугольник, а точка B лежит на ней.

4. Минимальная сила. Подставим наибольшее плечо в условие моментов:

$$F\sqrt{5}\,a = \frac{4}{3}\,mga \quad \Rightarrow \quad F = \frac{4}{3\sqrt{5}}\,mg = \frac{4\sqrt{5}}{15}\,mg \approx 0{,}60\,mg.$$

Сила направлена перпендикулярно AB, вверх и вправо: вектор AB имеет проекции $(2a;\,-a)$, а перпендикулярный ему — $(1;\,2)$, то есть тангенс угла наклона силы к горизонту равен 2.



Сила, приложенная в B под углом φ к перпендикуляру к AB, равна $F = \dfrac{4mg}{3\sqrt{5}\cos\varphi}$; при $\varphi = 0$ минимум

Обратите внимание: минимальная сила не вертикальна. Вертикальная сила в B (или в C) имеет плечо $2a$ и потребует $F = \frac{4}{3}\,mg\,a/(2a) = \frac{2}{3}\,mg \approx 0{,}67\,mg$ — больше, чем $0{,}60\,mg$. Сумма сил при этом тоже обязана быть нулевой, и это обеспечивает шарнир: из $\vec{F} + \vec{R} + m\vec{g} = 0$ получаем проекции реакции $R_x = -\frac{4}{15}\,mg$, $R_y = \frac{7}{15}\,mg$ (влево и вверх), $R = \frac{\sqrt{65}}{15}\,mg \approx 0{,}54\,mg$ — конечная сила, шарнир её создаст, поэтому уравнение моментов относительно A было достаточным.

Проверка. Размерность: $F \sim mg$ — сила. Знак: $F > 0$, момент $\vec{F}$ действительно направлен против часовой стрелки, против момента силы

тяжести. Оценка: сила тяжести приложена на расстоянии $\frac{4}{3}a \approx 1{,}33a$ от шарнира, а рычаг силы $\vec{F}$ вдвое с лишним длиннее ($\sqrt{5}a \approx 2{,}24a$), поэтому F вдвое с лишним меньше mg — получили $0{,}60\,mg$. Физический смысл: чтобы удержать тело малой силой, прикладывают её на самом длинном рычаге и тянут перпендикулярно рычагу.

Ответ. $F_{\min} = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\,mg = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}\,mg \approx 0{,}60\,mg$; сила приложена в вершине большего острого угла B и направлена перпендикулярно гипотенузе.