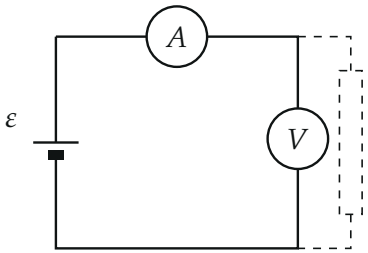
Амперметр и вольтметр на батарее

Задача 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 2] К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.



▲ **Решение. Что происходит.** Батарея, амперметр и вольтметр соединены последовательно, поэтому ток батареи равен току амперметра. Внутренние сопротивления батареи r и амперметра r_A неизвестны, и находить их по отдельности не нужно: они включены последовательно и действуют вместе как одно сопротивление $R_0 = r + r_A$. Значит, батарея и амперметр — это «эквивалентный источник» с ЭДС ε и внутренним сопротивлением R_0, а вольтметр (вместе с добавленным сопротивлением, когда оно есть) — его нагрузка. Напряжение на нагрузке всегда равно $\varepsilon - IR_0$, какова бы ни была нагрузка. Главная идея: два состояния цепи дают два таких равенства, и неизвестное IR_0 из них исключается.

Обозначения. U и I — показания вольтметра и амперметра до включения сопротивления R; U' и I' — после; $R_0 = r + r_A$.

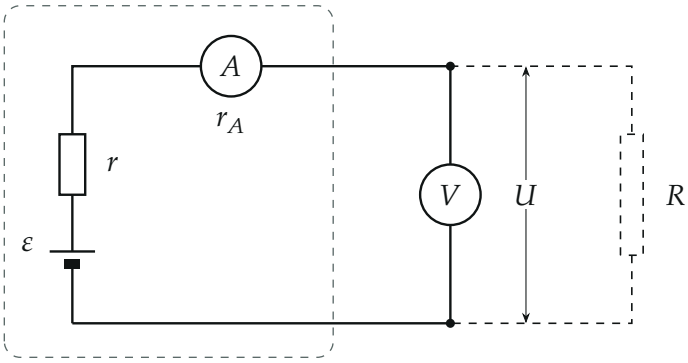
1. Закон Ома для замкнутой цепи. Ток I идёт через батарею, амперметр и нагрузку, поэтому ЭДС равна сумме падений напряжения на R_0 и на нагрузке: $\varepsilon = IR_0 + U_{\text{нагр}}$. Вольтметр подключён к тем же двум точкам, что и нагрузка (с сопротивлением R он тоже соединён параллельно), поэтому его показание равно $U_{\text{нагр}}$ в обоих случаях. Запишем закон для двух состояний (схема — на рисунке ниже).

До включения R:

$$\varepsilon = U + IR_0. \qquad (1)$$

После включения R амперметр показывает полный ток $I' = 2I$, вольтметр — $U' = U/2$:

$$\varepsilon = \frac{U}{2} + 2IR_0. \qquad (2)$$



эквивалентный источник:
ε и $R_0 = r + r_A$

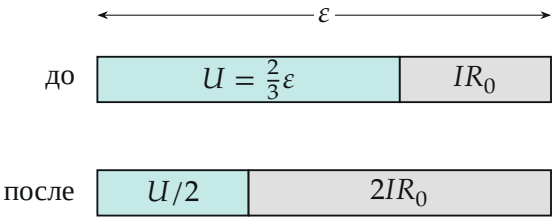
Эквивалентная схема: вольтметр (и сопротивление R, если оно включено) подключён к зажимам источника, напряжение между которыми — U

2. Исключаем неизвестное IR_0. Неизвестных величин три (ε задано, остаются U и IR_0), уравнений два — этого достаточно, так как U нужно выразить через ε. Удвоим уравнение (1) и вычтем (2):

$$2\varepsilon - \varepsilon = 2U - \frac{U}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{3}{2}U.$$

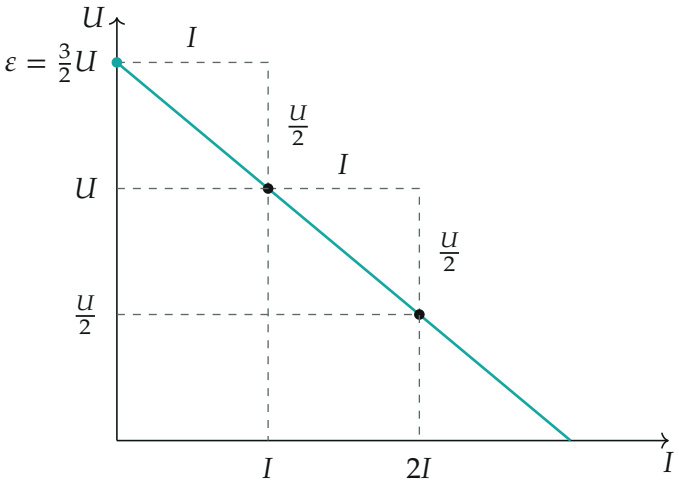
Отсюда

$$U = \frac{2}{3}\varepsilon.$$



Как делится ЭДС: до включения R на U и IR_0, после — на $U/2$ и $2IR_0$; сумма в обоих случаях равна ε

3. Второй способ — график. Показание вольтметра как функция тока амперметра — это $U = \varepsilon - IR_0$, прямая. Через две точки $(I;\, U)$ и $(2I;\, U/2)$ эта прямая проходит. Когда ток вырос на I, напряжение упало на $U/2$. Продолжим прямую в сторону малых токов: при токе, меньшем на I (то есть при $I \to 0$), напряжение вырастет ещё на $U/2$ и достигнет $U + U/2 = \frac{3}{2}U$. Но при нулевом токе вольтметр показывает ЭДС: $\varepsilon = \frac{3}{2}U$. Ответ тот же.



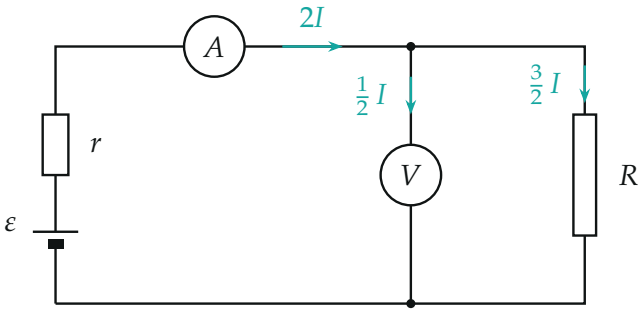
Прямая $U = \varepsilon - IR_0$ через точки $(I;\, U)$ и $(2I;\, U/2)$: на оси напряжений она отсекает ε

Проверка. Размерность: $U = \frac{2}{3}\varepsilon$ — вольты. Предельный случай: если $R_0 \to 0$, то $U = \varepsilon$ при любой нагрузке и показание вдвое упасть не может — в нашем ответе $U < \varepsilon$ именно из-за $R_0 \neq 0$. Согласованность:

из $U = Ir_V = \frac{2}{3}\varepsilon$ и $\varepsilon = I(R_0 + r_V)$ получаем $r_V = 2R_0$ и $I = \varepsilon/(3R_0)$. После включения R ток вольтметра равен $U'/r_V = \frac{1}{2}I$, а через R идёт остальное: $2I - \frac{1}{2}I = \frac{3}{2}I$. Тогда

$$R = \frac{U'}{(3/2)\,I} = \frac{U/2}{(3/2)\,I} = \frac{2R_0}{3}.$$

Такое сопротивление существует, значит, условие задачи выполнимо.



Токи после включения R (в долях тока I до включения)

Обратите внимание: амперметр стоит до разветвления, поэтому после включения R показывает полный ток, а не ток вольтметра; ток вольтметра при этом, наоборот, уменьшился вдвое.

Ответ. $U_V = \frac{2}{3}\varepsilon$.