Ускорение зависит от скорости

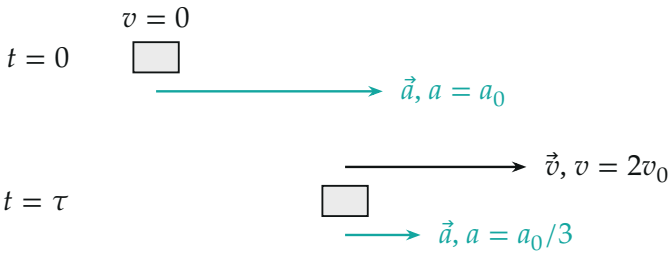
Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону

$$a = \frac{a_0 v_0}{v + v_0},$$

где v_0 — известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?

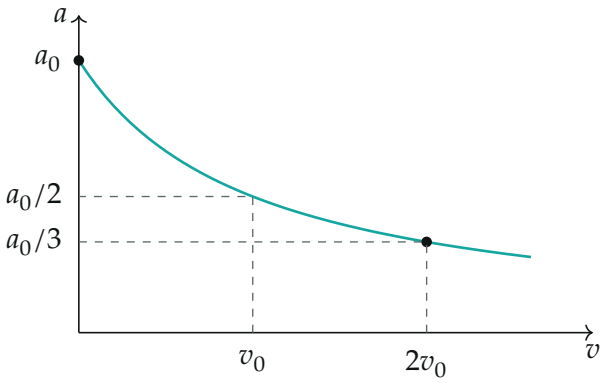
▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение зависит не от времени, а от скорости: чем быстрее тело, тем сильнее сопротивление воздуха и тем меньше ускорение. Поэтому формулы равноускоренного движения ($v = a_0 t$ и подобные) здесь не годятся. Зато на очень малом промежутке времени ускорение почти не меняется, и тогда $\Delta t = \Delta v / a$. Если сложить такие малые промежутки от начала разгона до скорости $2v_0$, получится искомое время, а сумма окажется площадью под графиком простой функции. Главная идея — выразить время через скорость: $dt = dv/a(v)$.

Качественная картина. Скорость растёт, ускорение падает (от a_0 до $a_0/3$ при $v = 2v_0$), скорость растёт всё медленнее. Поэтому искомое время больше, чем при постоянном ускорении a_0 (тогда было бы $2v_0/a_0$), но меньше, чем при постоянном ускорении $a_0/3$ (тогда было бы $6v_0/a_0$).



Поясняющий рисунок: в начале скорости нет, а ускорение наибольшее; к моменту τ скорость равна $2v_0$, а ускорение втрое меньше a_0

Обозначения. τ — искомое время; ось x направлена вдоль движения, поэтому проекции скорости и ускорения положительны и равны их модулям. Единицы: v_0 — скорость, a_0 — ускорение.



Зависимость ускорения от скорости $a = \dfrac{a_0 v_0}{v + v_0}$: гипербола, ускорение падает от a_0 до $a_0/3$

1. Малый промежуток времени. Рассмотрим малый промежуток Δt_n, на котором скорость почти не меняется и равна v_n, а ускорение $a_n = \dfrac{a_0 v_0}{v_n + v_0}$ можно считать постоянным. По определению ускорения скорость за этот промежуток меняется на $\Delta v_n = a_n \Delta t_n$. Отсюда

$$\Delta t_n = \frac{\Delta v_n}{a_n} = \frac{(v_n + v_0)\,\Delta v_n}{a_0 v_0}.$$

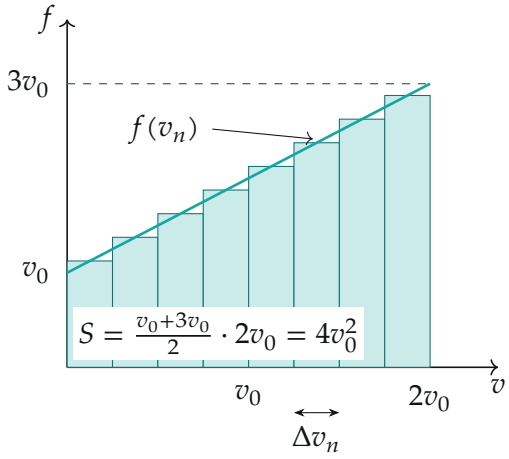
Формула верна для малых Δv_n: чем меньше промежуток, тем точнее ускорение внутри него постоянно.

2. Сумма по всему разгону. Разобьём разгон от скорости 0 до скорости $2v_0$ на такие промежутки. Сумма всех Δt_n — время τ, а скорости v_n пробегают значения от 0 до $2v_0$:

$$\tau = \sum_n \Delta t_n = \frac{1}{a_0 v_0} \sum_n (v_n + v_0)\,\Delta v_n.$$

3. Сумма — площадь. Слагаемое $(v_n + v_0)\Delta v_n$ — площадь узкой полоски шириной Δv_n и высотой $f(v_n) = v_n + v_0$ на графике функции

$f(v) = v + v_0$. Все полоски вместе заполняют фигуру под графиком от $v = 0$ до $v = 2v_0$ — трапецию с основаниями $f(0) = v_0, f(2v_0) = 3v_0$ и высотой $2v_0$.



Время — сумма площадей полосок под графиком $f(v) = v + v_0$ (показано восемь полосок), в пределе — площадь трапеции

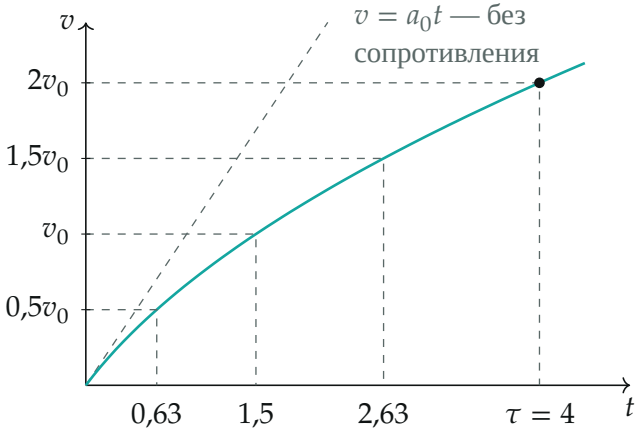
4. Площадь и ответ. Площадь трапеции $S = \dfrac{v_0 + 3v_0}{2} \cdot 2v_0 = 4v_0^2$, поэтому

$$\tau = \frac{S}{a_0 v_0} = \frac{4v_0^2}{a_0 v_0} = \frac{4v_0}{a_0}.$$

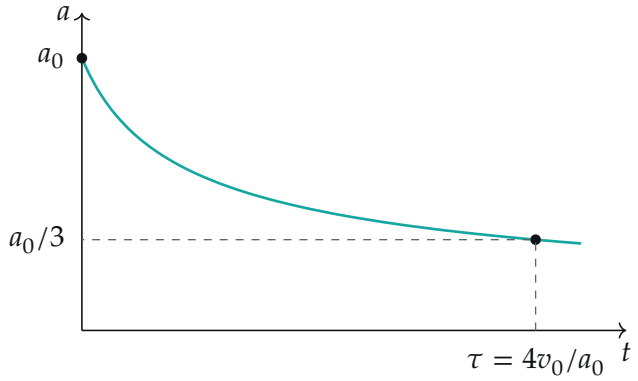
5. Второй способ — точное интегрирование. Запишем $dt = \dfrac{dv}{a}$ и проинтегрируем от 0 до v: $(v + v_0)\,dv = a_0 v_0\,dt$, откуда

$$\frac{v^2}{2} + v_0 v = a_0 v_0\, t \quad \Rightarrow \quad v(t) = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0 v_0\, t}.$$

Корень взят положительный: так $v(0) = 0$. Условие $v = 2v_0$ даёт $2v_0^2 + 2v_0^2 = a_0 v_0 \tau$, то есть $\tau = 4v_0/a_0$. Результат совпал.



Скорость тела: кривая $v(t) = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0v_0t}$ *(по осям —* v/v_0 *и* a_0t/v_0*). Одинаковые приращения скорости* $0{,}5\,v_0$ *занимают всё больше времени:* 0,63; 0,88; 1,13; 1,38 *в единицах* v_0/a_0



Ускорение как функция времени: $a(t) = \dfrac{a_0}{\sqrt{1 + 2a_0t/v_0}}$ *падает от* a_0 *до* $a_0/3$ *к моменту* τ

Обратите внимание: нельзя брать среднее арифметическое ускорений $(a_0 + a_0/3)/2 = \frac{2}{3}a_0$ и делить на него $2v_0$: получилось бы $3v_0/a_0$ — неверно. Ускорение по скорости меняется по гиперболе, а линейно по скорости меняется обратная величина $1/a = (v + v_0)/(a_0v_0)$; поэтому правильно усреднять именно её: среднее $1/a$ равно полусумме крайних

значений, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_0}+\frac{3}{a_0}\right)=\frac{2}{a_0}$, и $\tau = 2v_0\cdot\frac{2}{a_0}=\frac{4v_0}{a_0}$ — это то же самое вычисление площади трапеции.

Проверка. Размерность: v_0/a_0 — время. Границы: $2v_0/a_0 < \tau < 6v_0/a_0$, как и предсказывала качественная картина. Предел: время разгона до скорости V из тех же рассуждений равно

$$\tau_V = \frac{V^2/2 + v_0 V}{a_0 v_0} \approx \frac{V}{a_0} \qquad (V \ll v_0),$$

то есть при малой скорости получается равноускоренное движение с ускорением a_0, как и должно быть, пока сопротивление мало.

Ответ. $\tau = \dfrac{4v_0}{a_0}$.