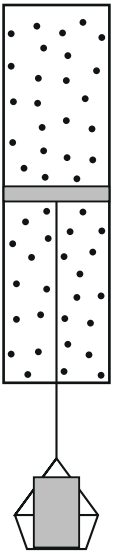
Поршень с чашкой в сосуде

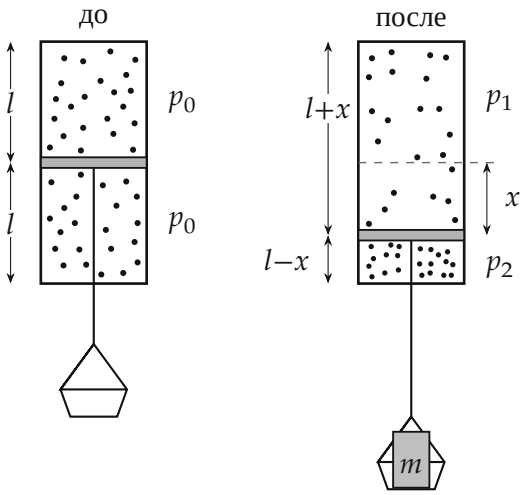
Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 4] В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень лёгкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена лёгкая чашка. В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m, и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоёмкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?



▲ **Решение. Что происходит.** Груз тянет поршень вниз. Поршень колеблется, колебания затухают, и он останавливается ниже прежнего положения: верхний газ расширился (давление упало), нижний сжался (давление выросло), и разность давлений удерживает груз. Работа силы тяжести при этом не пропала: механическая энергия колебаний перешла

во внутреннюю энергию газов, газы нагрелись. Колебания — процесс неравновесный, поэтому ни адиабату $pV^\gamma = \text{const}$, ни работу $\int p\,dV$ здесь использовать нельзя. Работаем с двумя равновесными состояниями — до и после: пишем условие равновесия поршня, закон сохранения энергии для всей системы (газы и груз) и равенство температур газов (поршень проводит тепло). Главная идея — выразить всё через температуру, то есть через одну величину $Q = RT$.

Обозначения. $l = h/2$ — длина каждого отсека вначале; x — смещение поршня вниз; p_1 и p_2 — давления в верхнем и нижнем отсеках после остановки; T — температура газов после остановки, T_0 — до: $p_0 Sl = RT_0$. Ось y направлена вниз.

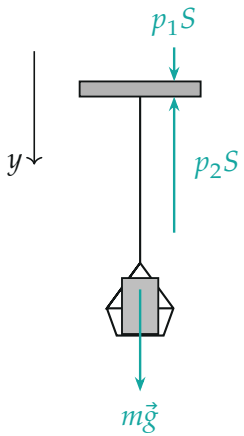


Состояния до и после: в каждом отсеке по одному молю; поршень сместился на x, верхний газ занял $l + x$, нижний — $l - x$

1. Равновесие поршня с чашкой и грузом. Рассмотрим поршень, стержень, чашку и груз как одно тело. Поршень и чашка лёгкие, их вес не учитываем. На тело действуют: сила тяжести груза $m\vec{g}$ (вниз), сила давления верхнего газа $p_1 S$ (вниз) и сила давления нижнего газа $p_2 S$ (вверх). Давление воздуха на тонкий стержень не учитываем. После остановки ускорения нет. Запишем второй закон Ньютона в проекции

на ось y (вниз):

$$mg + p_1 S - p_2 S = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \frac{mg}{S}. \tag{1}$$



Силы на тело «поршень + стержень + чашка + груз» (длины стрелок — для $mg = 3p_0 S$: $p_2 S = p_1 S + mg$)

2. Одинаковая температура. Поршень хорошо проводит тепло, поэтому в конце температуры газов одинаковы. Для каждого газа ($\nu = 1$ моль) запишем уравнение Клапейрона — Менделеева и обозначим $Q = RT$ (величина с размерностью энергии): $p_1 S(l + x) = Q$ для верхнего газа и $p_2 S(l - x) = Q$ для нижнего. Отсюда

$$p_1 S = \frac{Q}{l + x}, \qquad p_2 S = \frac{Q}{l - x}. \tag{2}$$

Внутренняя энергия одного моля одноатомного газа равна $\frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} Q$, а двух молей — $3Q$. В начале она равна $3p_0 Sl = 3RT_0$.

3. Температура через смещение. Подставим (2) в (1):

$$mg = Q\left(\frac{1}{l - x} - \frac{1}{l + x}\right) = \frac{2Qx}{l^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{mg\,(l^2 - x^2)}{2x}. \tag{3}$$

4. Закон сохранения энергии. Возьмём систему «газы + груз» между начальным состоянием (груз только что положили, всё неподвижно) и конечным (всё остановилось). Сосуд теплоизолирован, внешних сил, совершающих работу, нет, кинетическая энергия в обоих состояниях равна нулю. Потенциальная энергия груза уменьшилась на mgx, и столько же прибавилось внутренней энергии газов:

$$mg\,x = 3Q - 3p_0Sl. \qquad (4)$$

5. Уравнение для x. Подставим Q из (3) в (4) и умножим на $2x$:

$$2mg\,x^2 = 3mg\,(l^2 - x^2) - 6p_0S\,l\,x \quad \Rightarrow \quad 5mg\,x^2 + 6p_0S\,l\,x - 3mg\,l^2 = 0.$$

Положительный корень (поршень опустился вниз; отрицательный описывал бы подъём) — ответ на первый вопрос:

$$x = \frac{\sqrt{9p_0^2S^2 + 15m^2g^2} - 3p_0S}{5mg}\,l, \qquad l = \frac{h}{2}.$$

Обратите внимание: газы нагрелись не потому, что им передали теплоту, и не потому, что их сжали по адиабате. Энергия пришла от груза через затухающие колебания (трение внутри газа и о стенки), то есть процесс необратим. Поэтому для x используется закон сохранения энергии между двумя состояниями, а адиабата и $\int p\,dV$ дали бы неверный ответ.

6. Предел $m \to \infty$. Обозначим $\mu = mg/(p_0S)$. Тогда

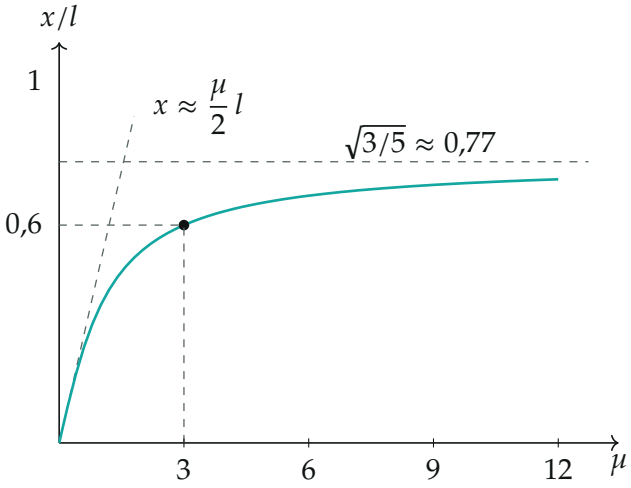
$$\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{9 + 15\mu^2} - 3}{5\mu}.$$

При $\mu \to \infty$ слагаемыми 9 и 3 можно пренебречь по сравнению с $15\mu^2$ и μ:

$$\frac{x}{l} \to \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}77.$$

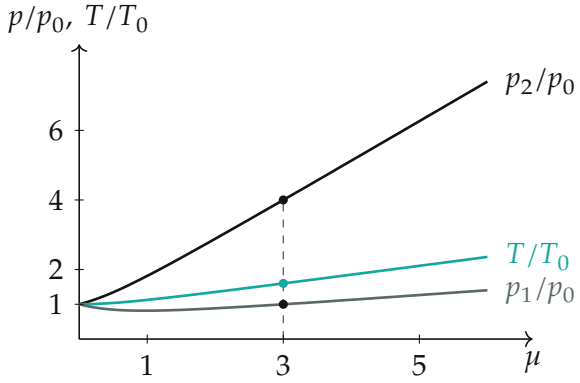
То же самое получается из (3) и (4) напрямую: при $p_0 S \ll mg$ уравнение (4) принимает вид

$$mg\,x = 3Q = \frac{3mg\,(l^2 - x^2)}{2x} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 3l^2 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{5}\,l^2.$$



Смещение поршня x/l в зависимости от $\mu = mg/(p_0 S)$: при малых μ — прямая $\mu/2$, при больших — насыщение на $\sqrt{3/5}$, при $\mu = 3$ — ровно 0,6

Груз бесконечной массы всё же не дошёл бы до дна. Груз выделяет энергию $mg\,x$, пропорциональную m, и газ нагревается тем сильнее, чем груз тяжелее: $T \propto m$. Горячий нижний газ давит сильнее и успевает остановить поршень при некотором $x < l$. Если бы поршень был почти у дна ($x \to l$), то по (3) температура была бы $Q = mg\,(l^2 - x^2)/(2x) \to 0$ (нижний газ в почти нулевом объёме создаёт силу mg и при ничтожной температуре), а по (4) газ при таком смещении должен был получить энергию $mg\,x \approx mg\,l$, то есть сильно нагреться. Требования несовместимы, и решением оказывается $x = \sqrt{3/5}\,l$: поршень остаётся на расстоянии $(1 - \sqrt{3/5})\,l \approx 0{,}23\,l$ от дна.



Давления и температура после остановки (в единицах p_0 и T_0) при росте μ. При $\mu = 3$: $p_1 = p_0$, $p_2 = 4p_0$, $T = 1{,}6\,T_0$

Проверка. Размерность: x/l и $mg/(p_0S)$ безразмерны. Предел малого груза: при $\mu \ll 1$ формула даёт

$$x \approx \frac{\mu}{2}\,l = \frac{mg\,l}{2p_0S}.$$

Независимо: при малом смещении $p_1 \approx p_0(1 - x/l)$, $p_2 \approx p_0(1 + x/l)$, и условие (1) даёт $2p_0x/l = mg/S$ — тот же результат.

Число: при $mg = 3p_0S$ ($\mu = 3$) уравнение $15x^2 + 6x - 3 = 0$ (в единицах l) имеет корень $x = 0{,}6\,l$. Тогда по (3) $Q = \dfrac{3\,(1 - 0{,}36)}{2 \cdot 0{,}6}\,p_0Sl = 1{,}6\,p_0Sl$ и по (2) $p_1S = Q/(1{,}6\,l) = p_0S$, $p_2S = Q/(0{,}4\,l) = 4p_0S$. Разность $p_2 - p_1 = 3p_0 = mg/S$ — сходится с (1); энергия $mg\,x = 1{,}8\,p_0Sl$ равна $3Q - 3p_0Sl = 1{,}8\,p_0Sl$ — сходится с (4).

Ответ.

$$\Delta x = \frac{\sqrt{9p_0^2S^2 + 15m^2g^2} - 3p_0S}{5mg}\,l, \qquad l = \frac{h}{2},$$

поршень опускается вниз. При $m \to \infty$ смещение $\Delta x \to \sqrt{3/5}\,l \approx 0{,}77\,l$: дна поршень не достигает — энергия груза идёт в нагрев газа, и давление нижнего газа растёт вместе с температурой.