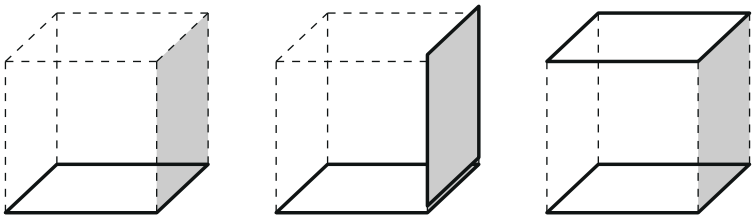
Индуктивность и сверхпроводящий виток

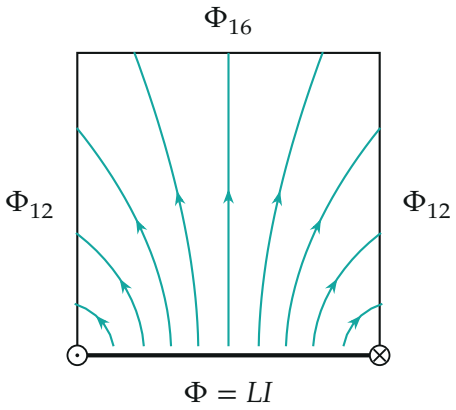
Задача 5. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 5] Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?



▲ **Решение. Что происходит.** Индуктивность витка — это поток через него, делённый на ток: $\Phi = LI$. Сверхпроводящий виток поддерживает поток через себя неизменным, равным нулю: когда рядом течёт ток основного витка, в нём наводится ток, и его поле частично вытесняет поле основного витка. Поэтому индуктивность основного витка уменьшается — на величину, которая зависит от взаимной индуктивности M двух витков: $L_{\text{эфф}} = L - M^2/L$. Остаётся узнать M для соседней и противоположной граней. Здесь работает теорема Гаусса для магнитного поля: суммарный поток через поверхность куба равен нулю, и это связывает обе взаимные индуктивности. Поэтому одна известная L_1 даёт M для соседней грани, затем — для противоположной, затем ответ.

Обозначения. Основной виток лежит на нижней грани куба, его ток I, поток через него $\Phi = LI$. Φ_{12} — поток поля основного витка через соседнюю боковую грань, Φ_{16} — через противоположную (верхнюю); оба считаем положительными, если поле выходит из куба. Взаимные

индуктивности $M_{12} = \Phi_{12}/I$ и $M_{16} = \Phi_{16}/I$. Поток через виток — это поток через грань куба, которую он ограничивает.



Разрез куба плоскостью, перпендикулярной основному витку и проходящей через его центр (кружок с точкой — ток к нам, кружок с крестиком — от нас). Линии поля основного витка (вычислены по закону Био — Савара) входят в куб через нижнюю грань и выходят через боковые и верхнюю

1. Теорема Гаусса. Магнитных зарядов нет, поэтому поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. Возьмём поверхность куба с нормалью наружу. Через нижнюю грань, на которой лежит основной виток, поле входит в куб, то есть поток наружу равен $-\Phi$. Через четыре боковые грани — одинаковые по симметрии — наружу выходит $4\Phi_{12}$, через верхнюю — Φ_{16}. Сумма равна нулю:

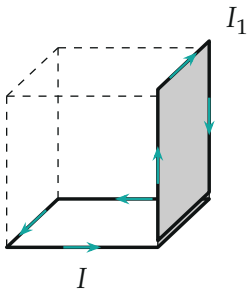
$$-\Phi + 4\Phi_{12} + \Phi_{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 4M_{12} + M_{16}. \qquad (1)$$

Последнее равенство — деление на I.

2. Соседний сверхпроводящий виток. Поток через сверхпроводящий виток не меняется, а до включения тока был нулевым, поэтому он остаётся нулевым. Пусть в боковом витке течёт ток I_1. Его собственная индуктивность равна L (виток такой же), а поток от основного витка через него — $M_{12}I$. Условие нулевого потока:

$$M_{12}I + LI_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = -\frac{M_{12}}{L}\,I.$$

Знак минус — поле бокового витка направлено против поля основного, как и нужно, чтобы поток компенсировался.



Основной виток (внизу, ток I) и сверхпроводящий виток на соседней грани (ток I_1 течёт так, что его поле направлено против поля основного витка)

3. Индуктивность основного витка рядом с боковым. Взаимная индуктивность симметрична: поток через основной виток от тока I_1 бокового равен $M_{12}I_1$ — с тем же M_{12} (теорема взаимности; здесь это видно и из симметрии куба: оба витка одинаковые, и их роли можно поменять поворотом куба). Полный поток через основной виток равен собственному плюс наведённому:

$$\Phi_{\text{полн}} = LI + M_{12}I_1 = \left(L - \frac{M_{12}^2}{L}\right) I \equiv L_1 I.$$

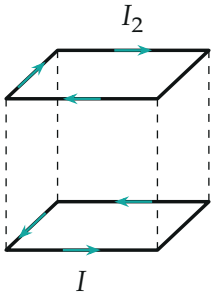
Отсюда, обозначив $s = \sqrt{1 - L_1/L}$ (безразмерная величина M_{12}/L),

$$M_{12} = sL, \qquad s = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}. \tag{2}$$

Корень взят положительный: $M_{12} > 0$ (поле витка выходит через боковые грани) — см. «Обратите внимание».

4. Взаимная индуктивность с противоположным витком. Из (1) и (2)

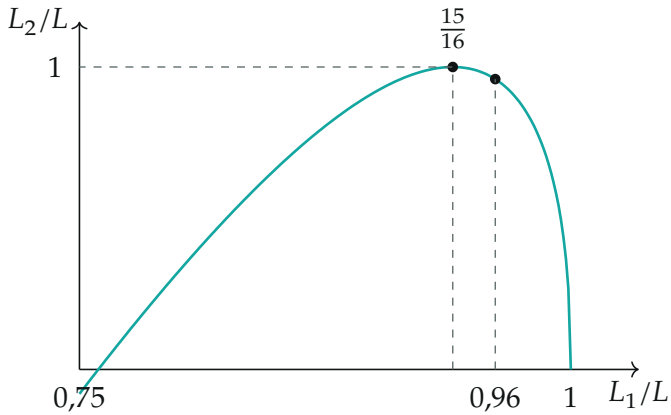
$$M_{16} = L - 4M_{12} = (1 - 4s)\, L. \tag{3}$$



Основной виток (внизу, ток I) и сверхпроводящий виток на противоположной грани (ток I_2)

5. Индуктивность с противоположным сверхпроводящим витком. Те же рассуждения, что в пунктах 2 и 3, с заменой $M_{12} \to M_{16}$: поток через верхний виток нулевой, $M_{16}I + LI_2 = 0$, и $L_2 = L - M_{16}^2/L$. По (3)

$$L_2 = L\left[1 - (1-4s)^2\right] = L\left[1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right].$$



L_2/L как функция L_1/L: наибольшее значение 1 при $L_1 = \frac{15}{16}L$ (поток через противоположную грань равен нулю); вторая точка — пример $L_1 = 0{,}96\,L$, $L_2 = 0{,}96\,L$; слева кривая выходит из нуля при $L_1 = \frac{3}{4}L$

Обратите внимание: знак корня в (2). Если взять $M_{12} < 0$, получилось бы $M_{16} = (1 + 4s)L > L$ и $L_2 = L - M_{16}^2/L < 0$, а индуктивность отрицательной быть не может. К тому же поле тонкого витка действительно выходит из куба через боковые грани (линии поля на рисунке разреза), так что $M_{12} > 0$.

Проверка. Размерность: все слагаемые — индуктивности. Предел: если поток через противоположную грань равен нулю ($M_{16} = 0$, то есть $s = \frac{1}{4}$ и $L_1 = \frac{15}{16}L$), то сверхпроводящий виток на ней ничего не наводит, и формула даёт $L_2 = L$. Другой предел: сверхпроводящий виток всегда уменьшает индуктивность ($L_1 \leq L$, $L_2 \leq L$), и формула этого не нарушает. Числовой пример: при $L_1 = 0{,}96\,L$ получаем $s = 0{,}2$, $M_{16} = 0{,}2\,L$ и

$$L_2 = L\,(1 - 0{,}04) = 0{,}96\,L.$$

Ответ. $L_2 = L\left[1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right]$.