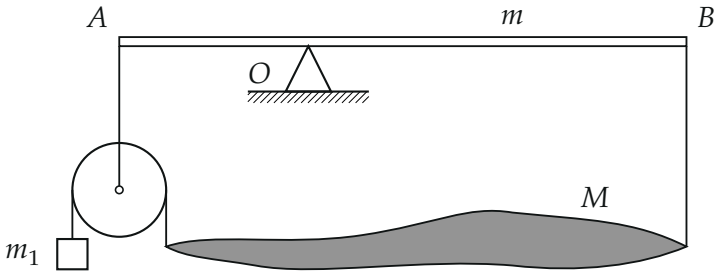
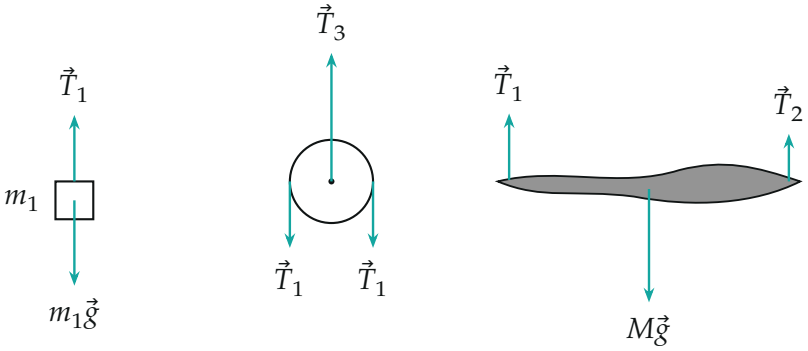
Рычаг с блоком и телом

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Рычаг AB массой m находится в равновесии на точечной опоре O. Плечи рычага относятся как $AO : OB = 1 : 2$. К концам рычага с помощью невесомых нитей прикреплены невесомый блок и неоднородное тело массой M. Ко второму концу тела прикреплена нить с грузом, переброшенная через блок. Найти массу груза m_1.



▲ **Решение. Что происходит.** Это статика: ничто не движется, поэтому для каждого тела сумма сил равна нулю, а для рычага ещё и сумма моментов относительно опоры O равна нулю. Главная идея: пойти от груза к рычагу по цепочке «груз → нить через блок → блок → левый конец рычага» и отдельно разобраться с правым концом, через тело M. Нити невесомы, поэтому натяжение вдоль каждой нити (и по обе стороны от идеального блока) одно и то же. Положение центра масс неоднородного тела нам не нужно: достаточно, что на него действуют три вертикальные силы.

Обозначения. T_1 — натяжение нити с грузом (она одна, переброшена через блок, и привязана к левому концу тела); T_2 — натяжение нити, идущей от конца B рычага к правому концу тела; T_3 — натяжение нити, идущей от конца A рычага к оси блока; $l = AO$, тогда $OB = 2l$. Рычаг однороден (так сказано в условии: рычаг массой m), его центр масс — в середине, на расстоянии $1{,}5\,l$ от A и, значит, $0{,}5\,l$ правее O.



груз блок тело M

Силы на груз, блок и тело (длины стрелок — для $M = 3$, $m = 2$ в условных единицах, $g = 1$)

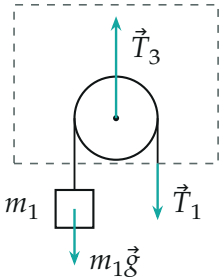
1. Груз. Груз неподвижен, на него действуют сила тяжести и натяжение нити. Запишем условие равновесия груза в проекции на вертикаль:

$$T_1 = m_1 g.$$

2. Блок. Блок невесом, а нить через него переброшена, поэтому на ось блока вниз действуют две ветви нити с одинаковым натяжением T_1, а вверх — нить от конца A с натяжением T_3. Условие равновесия блока (сумма сил равна нулю):

$$T_3 = 2T_1 = 2m_1 g.$$

Ту же связь можно получить, не вспоминая про блок: рассмотрим груз вместе с блоком и нитью на нём как одну систему. Снаружи на неё действуют три силы: T_3 вверх, $m_1 g$ вниз (груз) и T_1 вниз (правая ветвь нити). Тогда $T_3 = m_1 g + T_1 = 2m_1 g$ — то же самое.



Груз, блок и нить на нём — одна система (граница — пунктир); внешние силы на неё

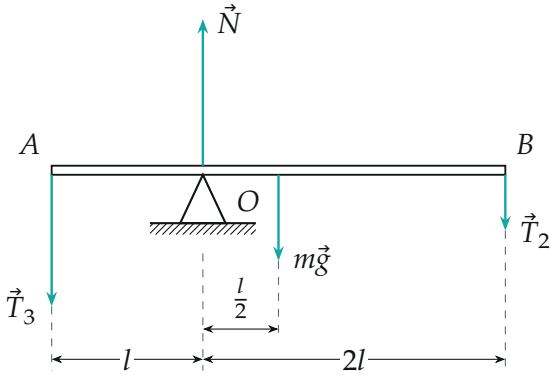
3. Тело M**.** Неоднородное тело неподвижно, на него действуют сила тяжести $M\vec{g}$, натяжение T_1 левой нити (та же нить, что держит груз) и натяжение T_2 правой нити. Где именно приложена сила тяжести, не важно — так как мы пишем только баланс вертикальных сил:

$$T_1 + T_2 = Mg \quad \Rightarrow \quad T_2 = Mg - m_1 g.$$

Обратите внимание: моменты сил для тела M мы не записываем — они определили бы, где у тела центр масс, а это в задаче не спрашивают. Именно поэтому «неоднородное» ничего не портит.

4. Рычаг. Рычаг в равновесии, значит, равна нулю сумма моментов относительно опоры O. Выбираем точку O за ось, потому что тогда момент неизвестной силы реакции опоры $\vec{N}$ равен нулю. Силы, действующие на рычаг: T_3 вниз в точке A (плечо l), T_2 вниз в точке B (плечо $2l$), сила тяжести рычага mg вниз в его середине (плечо $0{,}5\,l$ справа от O). Против часовой стрелки поворачивает T_3, по часовой — T_2 и mg:

$$T_3 \cdot l = T_2 \cdot 2l + mg \cdot \frac{l}{2}.$$



Силы и плечи рычага (стрелки схематичны, штриховые линии — линии действия сил)

Здесь мы не знаем только T_3 и T_2, но оба уже выражены через m_1: $T_3 = 2m_1g$ из пункта 2 и $T_2 = Mg - m_1g$ из пункта 3. Неизвестным осталось одно — m_1.

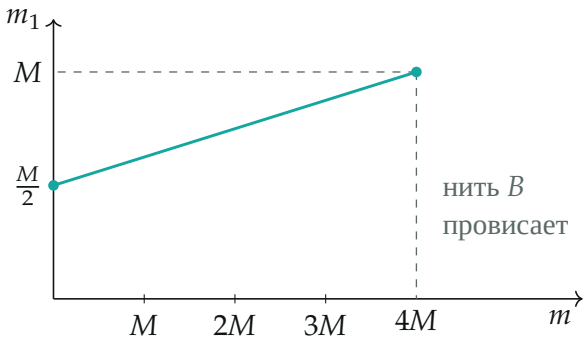
5. Собираем. Подставим в уравнение моментов и сократим на l (длина рычага в ответ не войдёт):

$$2m_1g = 2\,(Mg - m_1g) + \frac{mg}{2},$$

$$4m_1g = 2Mg + \frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{M}{2} + \frac{m}{8}.$$

Проверка. Размерность: M и m — массы, ответ — масса. Предел $m \to 0$: рычаг невесом, из уравнения моментов $T_3 = 2T_2$, а при $T_3 = 2T_1$ это даёт $T_1 = T_2$ — тело M висит на двух нитях с одинаковым натяжением, каждая держит половину веса, и $m_1 = M/2$; формула даёт то же. Знак: тяжёлый рычаг давит на правое плечо и должен тянуть левый конец вверх, то есть требует более тяжёлого груза, а $m/8 > 0$.

Область применимости. Нить от конца B может только тянуть: должно быть $T_2 \geq 0$. Подставим m_1: $T_2 = Mg - m_1g = \left(\frac{M}{2} - \frac{m}{8}\right)g \geq 0$, то есть $m \leq 4M$. При более тяжёлом рычаге нить B провисла бы, и равновесие в описанном виде невозможно.



Масса груза в зависимости от массы рычага: равновесие возможно при $0 \leq m \leq 4M$

Физический смысл. Рычаг, блок и тело образуют цепь, по которой вес передаётся с груза на опору. Блок удваивает натяжение, длинное плечо вдвое облегчает правую нить, а вес самого рычага добавляет момент на правой стороне, который должен уравновеситься большим грузом слева.

Ответ. $m_1 = \dfrac{M}{2} + \dfrac{m}{8}$.