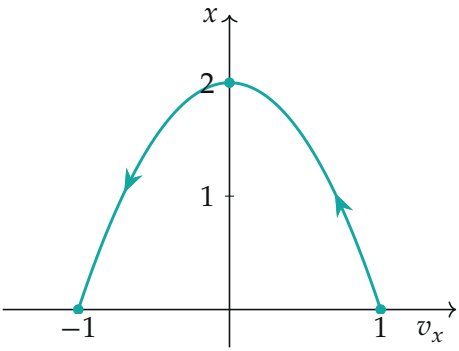
Движение со связью $x(v_x)$

Задача 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Точечное тело начинает движение из точки $x = 0$ в положительном направлении оси x. Известно, что координата тела x и его скорость в процессе движения связаны соотношением $x = Av_x^2 + B$, где $A = -2$ с^2/м, $B = 2$ м. Вернется ли тело в точку $x = 0$ и, если да, то через какое время после выхода из нее?



Поясняющий рисунок: связь $x = 2 - 2v_x^2$ на плоскости (v_x, x); v_x в м/с, x в м

▲ **Решение. Что происходит.** Нам дана не зависимость от времени, а связь между координатой и скоростью. Главная идея: продифференцировать эту связь по времени, ведь $\dfrac{dx}{dt} = v_x$, а $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x$. Получится связь между ускорением и скоростью, и она окажется настолько простой, что движение станет известным: это равноускоренное движение, такое же, как у тела, брошенного вертикально вверх.

Обозначения. v_x и a_x — проекции скорости и ускорения на ось x (знак они несут сами); v_0 — проекция начальной скорости.

1. Начальная скорость. В начальный момент $x = 0$, поэтому из связи $0 = Av_0^2 + B$, то есть

$$v_0^2 = -\frac{B}{A} = 1 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Тело стартует в положительном направлении оси, значит, берём корень со знаком плюс: $v_0 = \sqrt{-B/A} = 1$ м/с.

2. Ускорение. Продифференцируем связь по времени. Слева получим $dx/dt = v_x$, справа — производную сложной функции: $\dfrac{d\left(v_x^2\right)}{dt} = 2v_x\dfrac{dv_x}{dt} = 2v_x a_x$ (производная по внешней функции v_x^2, затем по внутренней v_x). Константы A и B не меняются:

$$v_x = 2A\,v_x\,a_x \quad \Rightarrow \quad v_x\,(1 - 2Aa_x) = 0.$$

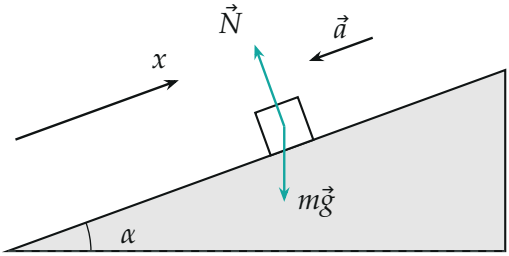
Пока тело движется ($v_x \neq 0$), можно сократить на v_x:

$$a_x = \frac{1}{2A} = -\frac{1}{4}\ \text{м/с}^2 = \text{const} < 0.$$

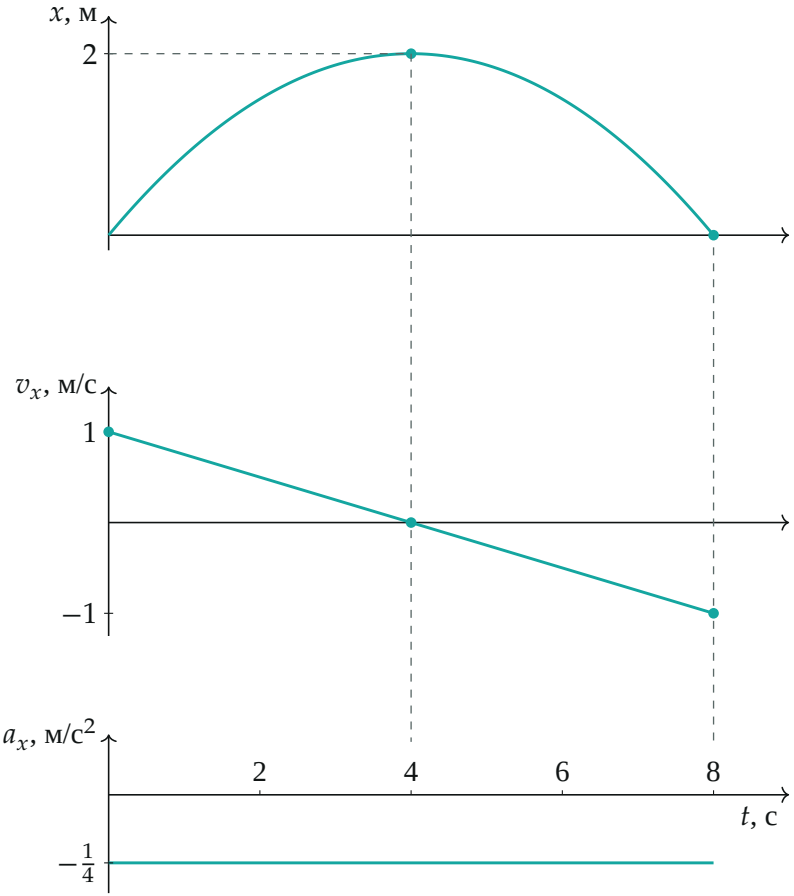
Обратите внимание: сокращать на v_x можно только при $v_x \neq 0$. В точке остановки уравнение $v_x(1 - 2Aa_x) = 0$ само по себе ускорения не определяет. Но ускорение гладко меняется со временем, значит, в точке остановки оно то же, $-1/4$ м/с^2, и закон $a_x = \text{const}$ действует на всём пути.

3. Что это за движение. Ускорение постоянно, а его проекция отрицательна, а скорость вначале положительна. Значит, тело сначала замедляется и едет вправо, останавливается, затем разгоняется влево. Остановка наступает, когда $v_x = v_0 + a_x t = 0$, то есть через $t_1 = v_0/|a_x| = 4$ с. Координата в этот момент — наибольшая, и из исходной связи при $v_x = 0$ получаем $x_{\max} = B = 2$ м.

Такое движение — не экзотика. Именно так движется шайба по гладкой наклонной плоскости с очень малым углом: ускорение вдоль склона $|a_x| = g\sin\alpha$, и при $g = 10$ м/с^2 получаем $\sin\alpha = 1/40$. Шайба, пущенная вверх по склону со скоростью 1 м/с, поднимется на 2 м вдоль склона, остановится и съедет обратно.



Аналог — шайба на гладкой наклонной плоскости; угол на рисунке увеличен для наглядности, в действительности $\sin\alpha = 1/40$



Графики $x(t), v_x(t), a_x(t)$ *по вычисленным точкам:* $x = t - t^2/8$, $v_x = 1 - t/4$, $a_x = -1/4$

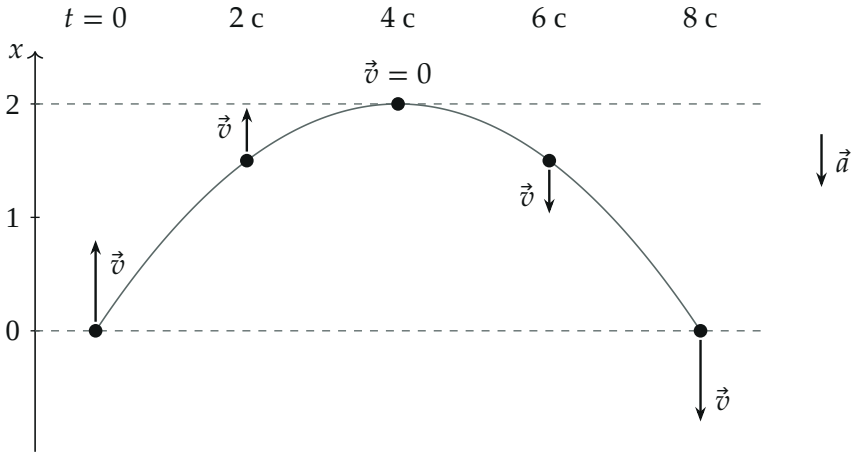
4. Время возврата. Движение равноускоренное, поэтому координата зависит от времени как $x(t) = v_0 t + \dfrac{a_x t^2}{2}$. Приравняем её к нулю:

$$v_0 t + \frac{a_x t^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t\left(v_0 + \frac{a_x t}{2}\right) = 0.$$

Корень $t = 0$ — старт; второй корень даёт возврат:

$$\Delta t = -\frac{2v_0}{a_x} = \frac{2v_0}{|a_x|} = 4\sqrt{B|A|} = 8 \text{ с}.$$

Здесь $v_0 = \sqrt{B/|A|}$ и $|a_x| = 1/(2|A|)$. Тело обязательно вернётся: ускорение постоянно направлено в сторону начала, и после остановки тело в $x_{\max} = 2$ м разгоняется назад. Подъём занимает $t_1 = 4$ с, возврат — ещё столько же: v_x на пути вниз проходит те же значения, что и вверх, но с обратным знаком, и в точку $x = 0$ тело приходит со скоростью $-v_0 = -1$ м/с. Проверим по исходной связи: при $v_x = -1$ м/с получаем $x = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.



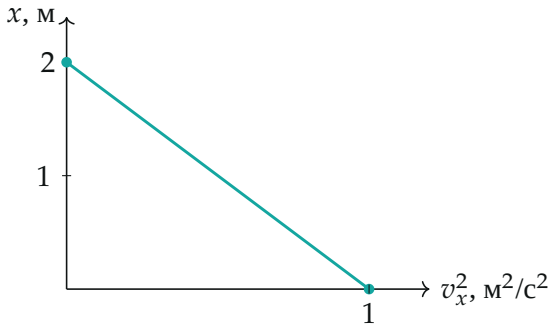
Положения тела через 2 с (точки) и скорость в них; серая линия — $x(t)$; ускорение $\vec{a}$ направлено вниз всё время

Второй способ для пункта 2 (а заодно и для пунктов 1 и 3). Движение с постоянным ускорением удовлетворяет известному соотношению

$v_x^2 = v_0^2 + 2a_x x$ (начало отсчёта в точке старта). Выразим из него x:

$$x = \frac{1}{2a_x}\,v_x^2 - \frac{v_0^2}{2a_x}.$$

Сравним с данным $x = Av_x^2 + B$. Совпадение возможно, только если $A = \dfrac{1}{2a_x}$ и $B = -\dfrac{v_0^2}{2a_x}$, то есть $a_x = \dfrac{1}{2A} = -0{,}25$ м/с^2 и $v_0^2 = -\dfrac{B}{A} = 1$ м^2/с^2 — ровно то, что получилось дифференцированием. Если построить зависимость x от v_x^2, получится прямая с наклоном $A = -2$ с^2/м — как и должно быть у равноускоренного движения.



Связь $x = Av_x^2 + B$ — прямая в координатах (v_x^2, x): старт при $v_x^2 = 1$, остановка при $x = 2$ м

Проверка. Размерность: $[A] = \text{с}^2/\text{м}$, поэтому $a_x = 1/(2A)$ измеряется в м/с^2, а $\Delta t = 4\sqrt{B|A|}$ — в $\sqrt{\text{м}\cdot\text{с}^2/\text{м}} = \text{с}$. Предел: если $B \to 0$ (тело не может отойти от начала), то $\Delta t \to 0$; если $|A| \to \infty$, ускорение $a_x \to 0$, тело почти не тормозит, и время возврата растёт — оба предела разумны. Ответ 8 с совпадает и с формулой $t_1 + t_1 = 4 + 4$ (подъём и возврат), и с $x(8) = 8 - 64/8 = 0$.

Физический смысл. Связь $x = Av_x^2 + B$ с $A < 0$ — это просто запись равноускоренного движения без времени: так же задают бросок вертикально вверх формулой $h = (v_0^2 - v^2)/(2g)$, только здесь «притяжение» очень слабое, 0,25 м/с^2.

Ответ. Да, вернётся: $\Delta t = 4\sqrt{B|A|} = 8$ с (ускорение $a_x = 1/(2A) = -0{,}25$ м/с^2, наибольшая координата $x_{\max} = B = 2$ м).