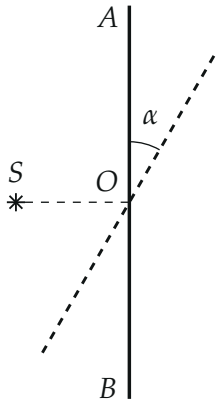
Изображение во вращающемся зеркале

Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Точечный источник света S находится на расстоянии $d = 15$ см от зеркала AB (см. рисунок). Зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через основание перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало (через точку O). Найти мгновенную скорость и мгновенное ускорение изображения источника в зеркале в тот момент, когда зеркало повернулось на угол $\alpha = 30°$ по сравнению с первоначальным положением.



Пунктир — зеркало, повёрнутое на угол α

▲ **Решение. Что происходит.** Изображение точки в плоском зеркале лежит симметрично ей относительно плоскости зеркала. Когда зеркало поворачивается, изображение движется. Главная идея: найти траекторию изображения и его угловую скорость, а дальше это обычное движение по окружности, где $v = \omega' R$ и $a = \omega'^2 R$.

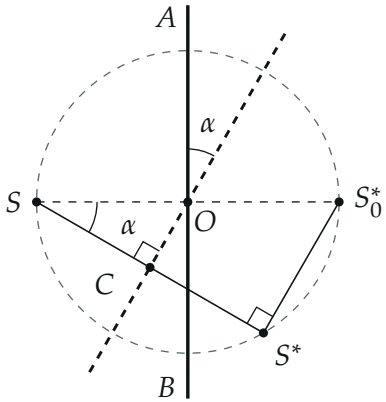
Замечание об условии. В условии не сказано, как быстро вращается зеркало. Будем считать, что оно вращается равномерно с угловой скоростью ω (иначе пришлось бы знать угловое ускорение). Ответ выразим через ω; в официальном решении числовой ответ $a = 0{,}6$ м/с^2 получен при $\omega = 1$ с$^{-1}$.

Обозначения. S_0^* — изображение источника при начальном положении зеркала, S^* — при повороте зеркала на угол α; ω' — угловая скорость поворота радиуса OS^*.

1. Траектория изображения. Изображение симметрично источнику, поэтому любая точка зеркала одинаково удалена от S и от S^*. Точка O лежит на зеркале в любом его положении (ось вращения проходит через неё), следовательно,

$$OS^* = OS = d.$$

Значит, изображение всё время находится на окружности радиуса d с центром в O. Тот же результат даёт геометрическое рассуждение. Пусть C — основание перпендикуляра из S на повёрнутое зеркало; C — середина отрезка SS^*. В начальном положении зеркала O — середина отрезка SS_0^*. Поэтому OC — средняя линия треугольника $SS^*S_0^*$, то есть $OC \parallel S^*S_0^*$. Раз $SC \perp OC$, то и $SS^* \perp S^*S_0^*$: угол при S^* прямой, и точка S^* лежит на окружности с диаметром SS_0^*, то есть на той же окружности.



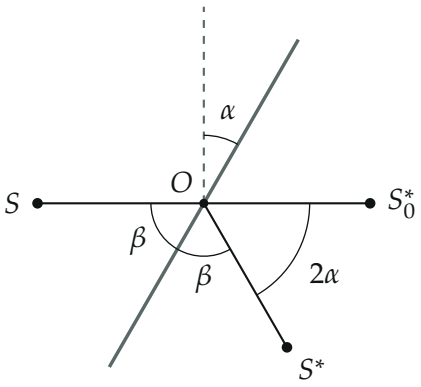
Построение изображений: S_0^* — при $\alpha = 0$, S^* — после поворота; C — середина SS^*, угол $SS^*S_0^*$ прямой

2. На какой угол повернулось изображение. Зеркало — ось симметрии пары S и S^*, поэтому оно делит угол SOS^* пополам. Угол между зеркалом и лучом OS в начальный момент равен $90°$ (зеркало перпендикулярно OS), а после поворота зеркала на α стал $\beta = 90° - \alpha$. Тогда угол

SOS^* равен $2\beta = 180° - 2\alpha$, а так как S, O и S_0^* лежат на одной прямой, угол между OS_0^* и OS^* равен

$$180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha.$$

Обратите внимание: зеркало повернулось на α, а изображение — на 2α, вдвое больше. Это известный факт: при повороте зеркала отражённый луч поворачивается вдвое сильнее.



Зеркало — биссектриса угла SOS^*: $\beta = 90° - \alpha$, откуда $\angle S_0^*OS^* = 2\alpha$ (штриховая линия — зеркало при $\alpha = 0$)

3. Угловая скорость изображения. Зеркало вращается равномерно, угол его поворота $\alpha = \omega t$. Радиус OS^* повернулся на $2\alpha = 2\omega t$, поэтому изображение движется по окружности радиуса d равномерно с угловой скоростью

$$\omega' = \frac{d(2\alpha)}{dt} = 2\omega.$$

4. Скорость и ускорение. Скорость изображения направлена по касательной к окружности, перпендикулярно OS^*, и равна

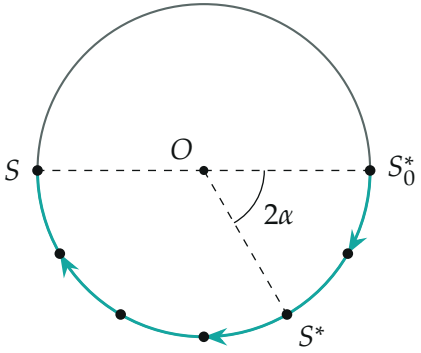
$$v_и = \omega' d = 2\omega d.$$

Движение равномерное, поэтому касательного ускорения нет, и ускоре-

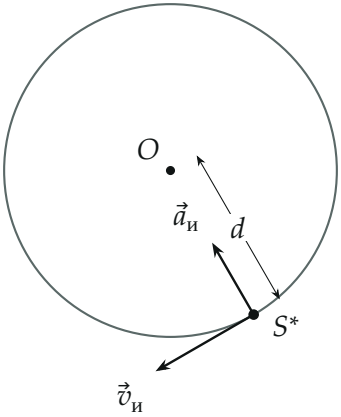
ние центростремительное, направлено к O:

$$a_{\text{и}} = \omega'^2 d = 4\omega^2 d.$$

Обратите внимание: ни $v_{\text{и}}$, ни $a_{\text{и}}$ не зависят от угла α, поэтому в ответе значение $30°$ не понадобилось — оно лишь определяет, где именно на окружности находится изображение, а не его скорость.



Траектория изображения при повороте зеркала от $0°$ до $90°$ (точки — через $15°$ поворота зеркала)



Скорость и ускорение изображения при $\alpha = 30°$ (длины стрелок условны)

5. Второй способ: координаты. Начало — в O, ось x — вдоль перпендикуляра к зеркалу из источника в сторону зеркала, ось y — вдоль

начального положения зеркала вверх. Источник в точке $(-d,\,0)$. Зеркало, повёрнутое на α по часовой стрелке, направлено вдоль единичного вектора $\vec{e} = (\sin\alpha,\ \cos\alpha)$. Изображение — отражение источника относительно этой прямой: $\vec{r}^{\,*} = 2(\vec{r}\cdot\vec{e})\vec{e} - \vec{r}$, где $\vec{r} = (-d, 0)$:

$$\vec{r}^{\,*} = (d\cos 2\alpha,\ -d\sin 2\alpha).$$

Подставим $\alpha = \omega t$ и продифференцируем по времени:

$$\vec{v} = (-2\omega d\sin 2\omega t,\ -2\omega d\cos 2\omega t),$$
$$\vec{a} = (-4\omega^2 d\cos 2\omega t,\ 4\omega^2 d\sin 2\omega t).$$

Отсюда $|\vec{v}| = 2\omega d$, $|\vec{a}| = 4\omega^2 d$, причём $\vec{a} = -4\omega^2\vec{r}^{\,*}$ — ускорение направлено строго к центру O. Результат тот же. При $\alpha = 30^\circ$ изображение в точке $(d\cos 60^\circ,\ -d\sin 60^\circ) = (7{,}5;\ -13{,}0)$ см.

Числа. При $d = 15$ см $= 0{,}15$ м:

$$v_{\text{и}} = 2\omega d = 0{,}30\,\omega \text{ м/с} \quad (\omega \text{ в с}^{-1}), \qquad a_{\text{и}} = 4\omega^2 d = 0{,}60\,\omega^2 \text{ м/с}^2.$$

Для $\omega = 1$ с$^{-1}$ получаем $v_{\text{и}} = 0{,}30$ м/с и $a_{\text{и}} = 0{,}60$ м/с^2 — это число совпадает с официальным ответом.

Проверка. Размерность: ωd — (1/с)·м = м/с, $\omega^2 d$ — м/с^2. Предельный случай: при $\omega \to 0$ зеркало неподвижно, изображение стоит на месте — обе величины обращаются в нуль. Численное дифференцирование формулы $\vec{r}^{\,*}(t)$ при $d = 0{,}15$ м, $\omega = 1$ с$^{-1}$ и $\alpha = 30^\circ$ даёт $|\vec{v}| = 0{,}300$ м/с и $|\vec{a}| = 0{,}600$ м/с^2.

Физический смысл. Изображение — виртуальная точка, и она может двигаться быстрее самого зеркала: скорость точки зеркала на расстоянии d от оси была бы ωd, а изображение движется вдвое быстрее.

Ответ. Изображение движется по окружности радиуса d равномерно: $v_{\text{и}} = 2\omega d$, $a_{\text{и}} = 4\omega^2 d$ (ω — угловая скорость зеркала; не зависят от угла поворота). Для $\omega = 1$ с$^{-1}$: $v_{\text{и}} = 0{,}30$ м/с, $a_{\text{и}} = 0{,}60$ м/с^2.