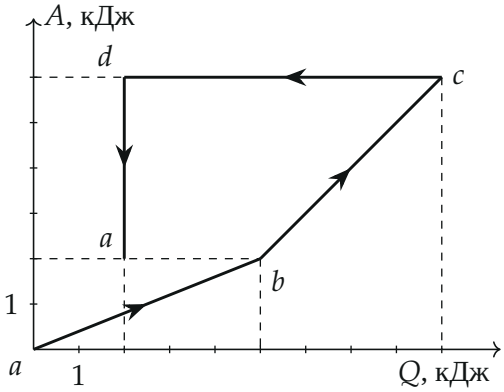
Цикл по графику A(Q)

Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 4] С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс *a*-*b*-*c*-*d*-*a* (начальное и конечное состояния газа совпадают). Дан график зависимости работы, совершенной газом с начала процесса, от количества теплоты, полученного газом с начала процесса. Качественно построить график зависимости давления газа от его объема в этом процессе и объяснить построение. Найти КПД процесса.



▲ **Решение. Что происходит.** Первое начало термодинамики связывает работу и теплоту: $Q = \Delta U + A$. Для одноатомного газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$, поэтому по отношению малой работы dA к малой теплоте dQ можно узнать вид процесса. Главная идея: на графике $A(Q)$ наклон участка и есть это отношение, а по нему опознаётся изопроцесс. Класс задачи — цикл по графику $A(Q)$: найти процессы, построить цикл в осях (V, p), посчитать КПД по теплоте, подведённой и отведённой на участках.

Обозначения. A и Q на графике — работа газа и теплота, полученная газом, *накопленные с начала процесса*. Работа и теплота на отдельном участке — разности координат его концов: ΔA и ΔQ. Теплота, отданная газом, отрицательна.

1. Читаем график. Одна клетка — 1 кДж. Координаты $(Q; A)$ вершин: начало $a\,(0;0)$, $b\,(5;2)$, $c\,(9;6)$, $d\,(2;6)$ и конец — вторая точка

$a\,(2;2)$. Обратите внимание: график не замкнут по координатам: состояние газа в конце то же, что в начале, но накопленные A и Q — не функции состояния, поэтому конец цикла лежит в точке $(2;2)$, а не в начале координат. Сразу видно главное: за цикл газ получил $Q_{\text{ц}} = 2$ кДж и совершил $A_{\text{ц}} = 2$ кДж, то есть $\Delta U_{\text{ц}} = Q_{\text{ц}} - A_{\text{ц}} = 0$, как и должно быть.

2. Какой процесс на каком участке. Для малого шага запишем первое начало и учтём, что $dA = p\,dV$, а $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$ даёт $dU = \frac{3}{2}\,(p\,dV + V\,dp)$:

$$dQ = dU + dA = \tfrac{5}{2}\,p\,dV + \tfrac{3}{2}\,V\,dp.$$

Значит, отношение dA/dQ равно $\dfrac{p\,dV}{\frac{5}{2}p\,dV + \frac{3}{2}V\,dp}$. Разберём участки по очереди.

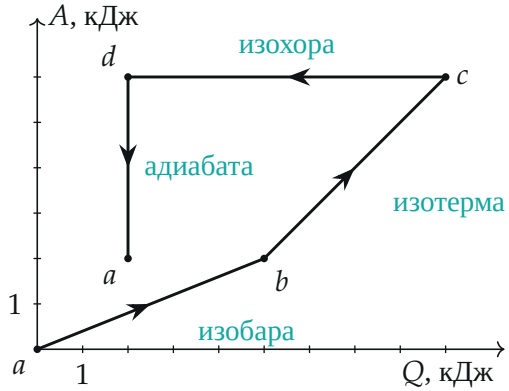
Участок $a \to b$: $\Delta Q = 5$ кДж, $\Delta A = 2$ кДж, отношение $\Delta A/\Delta Q = \dfrac{2}{5}$. Подставим в формулу $\dfrac{p\,dV}{\frac{5}{2}p\,dV + \frac{3}{2}V\,dp} = \dfrac{2}{5}$: получаем $\frac{3}{2}V\,dp = 0$, то есть $dp = 0$ — давление постоянно, это изобара. Газ нагревается и расширяется: $\Delta U_{ab} = 5 - 2 = 3$ кДж.

Участок $b \to c$: $\Delta Q = \Delta A = 4$ кДж, поэтому $\Delta U_{bc} = 0$. У одноатомного газа внутренняя энергия зависит только от температуры, значит, температура постоянна — изотерма. Газ расширяется и берёт теплоту 4 кДж.

Участок $c \to d$: $\Delta A = 0$, то есть $p\,dV = 0$, объём постоянен — изохора. Накопленное Q уменьшается с 9 до 2 кДж, значит, $\Delta Q_{cd} = -7$ кДж: газ отдаёт 7 кДж, $\Delta U_{cd} = -7$ кДж, давление и температура падают.

Участок $d \to a$: $\Delta Q = 0$ (вертикальная линия на графике) — адиабата. Газ совершает работу $\Delta A_{da} = 2 - 6 = -4$ кДж, то есть его сжимают, и $\Delta U_{da} = +4$ кДж: газ нагревается.

Проверка согласованности: сумма ΔU по всем участкам $3 + 0 - 7 + 4 = 0$ — за цикл внутренняя энергия не изменилась. Это независимо подтверждает, что на участке $c \to d$ отдано именно 7 кДж (из условия $\sum \Delta U = 0$ и значений остальных участков). В официальном решении тут написано «4 кДж» — опечатка: 4 кДж не сходится ни с графиком (накопленное Q падает с 9 до 2), ни с балансом энергии. На ответ она не влияет.



Процессы по наклону участков: $\Delta A/\Delta Q = 2/5$ *— изобара,* $= 1$ *— изотерма,* $\Delta A = 0$ *— изохора,* $\Delta Q = 0$ *— адиабата*

3. Построение графика $p(V)$**.** Рисуем по участкам, всё время помня, куда направлено движение.

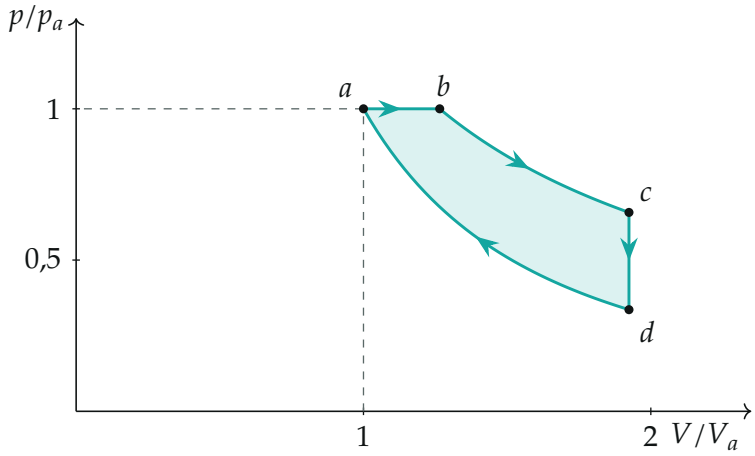
- $a \to b$ — изобара с $A > 0$: давление не меняется, объём растёт, горизонтальный отрезок вправо.
- $b \to c$ — изотерма с $A > 0$: объём растёт, давление падает по гиперболе $pV = \text{const}$.
- $c \to d$ — изохора с $Q < 0$: объём не меняется, давление падает — вертикальный отрезок вниз.
- $d \to a$ — адиабата с $A < 0$: газ сжимается, давление растёт, и кривая приходит в начальную точку. Адиабата идёт круче изотермы: $p \propto V^{-5/3}$ против $p \propto V^{-1}$.

Замкнутый цикл должен вернуться в точку a, и это дополнительно связывает числа. Пусть $x = \nu R T_a$. Тогда по изобаре $\nu R T_b = x + 2$ (работа $2 = \nu R \Delta T$), по адиабате $\nu R(T_a - T_d) = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$ кДж (из $\Delta U = -A$). Объёмы: $V_b/V_a = T_b/T_a$, на изотерме $A_{bc} = \nu R T_b \ln(V_c/V_b) = 4$, на изохоре $V_d = V_c$, на адиабате $TV^{2/3} = \text{const}$. Условие замыкания

$$\left(\frac{x}{x - 8/3}\right)^{3/2} = \frac{x+2}{x}\, e^{4/(x+2)}$$

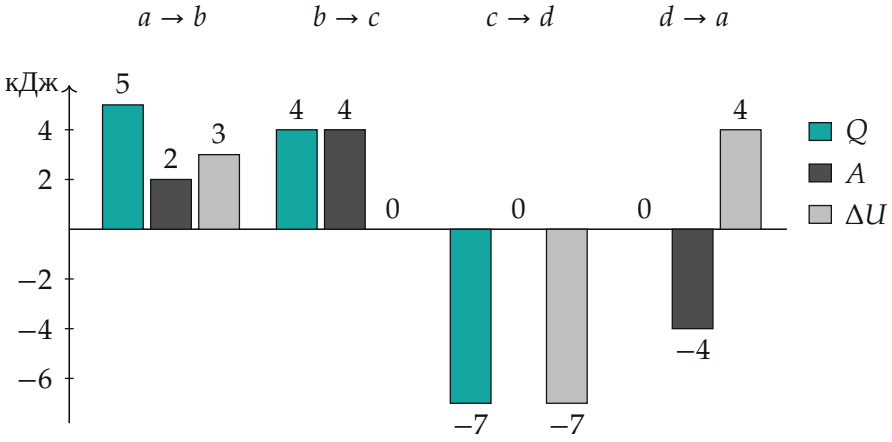
решается численно: $x \approx 7{,}5$ кДж. Самих p, V, T без количества вещества

не найти, но отношения известны: $V_b/V_a \approx 1{,}27$, $V_c = V_d \approx 1{,}92\,V_a$, $p_c \approx 0{,}66\,p_a$, $p_d \approx 0{,}34\,p_a$. По ним построен график.



Цикл в осях (V, p); заливка — работа газа за цикл (2 кДж); значения вычислены по данным графика

4. Теплота и работа по участкам. Столбики показывают Q, A и $\Delta U = Q - A$ на каждом участке.

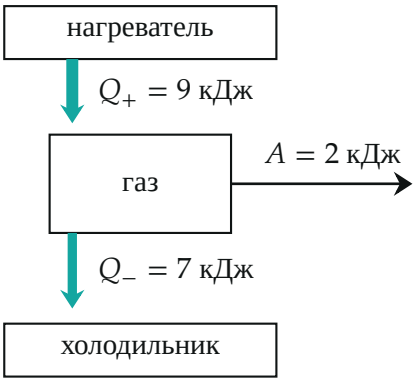


Теплота, работа и изменение внутренней энергии газа на участках цикла, кДж

5. КПД. Газ получает теплоту на участках $a \to b$ и $b \to c$: $Q_+ = 5 + 4 = 9$ кДж. На участке $c \to d$ он отдаёт $Q_- = 7$ кДж, а на адиабате теплообмена нет. Работа за цикл — сумма по участкам: $A_\text{ц} = 2+4+0-4 = 2$ кДж; она же равна площади цикла на графике $p(V)$ и разности подведённой и отведённой теплоты $Q_+ - Q_- = 9 - 7 = 2$ кДж — два способа дают одно и то же. КПД:

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_+} = \frac{2}{9} \approx 0{,}22.$$

Обратите внимание: в знаменателе — только теплота, которую газ реально получал (участки $a \to b$ и $b \to c$), то есть 9 кДж, а не итоговое значение $Q = 2$ кДж с конца графика: оно уже включает отданные 7 кДж.



Тепловая машина: 9 кДж получены, 2 кДж — работа, 7 кДж отданы

Проверка. Размерность: КПД — отношение энергий, безразмерно. Предел: КПД цикла не больше, чем у машины Карно между наибольшей и наименьшей температурами цикла. По найденным числам $T_b = T_c \approx 9{,}5$ и $T_d \approx 4{,}9$ (в тех же единицах, $x = 7{,}5$), поэтому $\eta_\text{max} = 1 - 4{,}9/9{,}5 \approx 0{,}49 > 0{,}22$ — согласовано.

Ответ. ab — изобара, bc — изотерма, cd — изохора, da — адиабата (график $p(V)$ на рисунке); $\eta = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}22$.