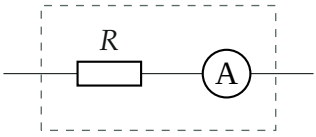
Параллельные амперметры

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, комплект 3, задача 1] Амперметр подключают к источнику, имеющему некоторое внутреннее сопротивление, и он показывает силу тока $I_1 = 1$ А. Если параллельно первому амперметру подключить второй, точно такой же, то сумма показаний амперметров будет равна $I_2 = 1{,}2$ А. Найти сумму показаний 8 точно таких же амперметров, подключенных к этому же источнику параллельно.



реальный амперметр

Поясняющий рисунок: реальный амперметр — идеальный прибор (нулевое сопротивление) и последовательно с ним сопротивление R

▲ **Решение. Что происходит.** Источник тока — это ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r. Амперметр неидеален: у него есть сопротивление R. Если бы R было равно нулю, второй амперметр ничего бы не изменил: ток источника был бы равен $\mathcal{E}/r$ при любом числе приборов, а у нас он вырос с 1 до 1,2 А. Параллельные амперметры работают как один прибор с сопротивлением R/n, а сумма их показаний равна току источника. Неизвестных три ($\mathcal{E}$, r, R), но ток зависит только от двух отношений, $\mathcal{E}/r$ и R/r. Это цепь с неизвестными параметрами источника и прибора: запишем закон Ома для замкнутой цепи при разном числе амперметров и разделим уравнения, чтобы лишнее ушло.

Обозначения. n — число параллельных амперметров; I_n — сумма их показаний (она же ток источника); известны $I_1 = 1$ А, $I_2 = 1{,}2$ А, найти I_8.

1. Сумма показаний равна току источника. Все амперметры подключены к одним и тем же двум узлам, поэтому по первому правилу Кирхгофа (сумма токов, входящих в узел, равна сумме выходящих) токи через амперметры в сумме дают ток источника I_n. Напряжение на всех

ветвях одно и то же, приборы одинаковы, значит, ток делится поровну и каждый амперметр показывает I_n/n.

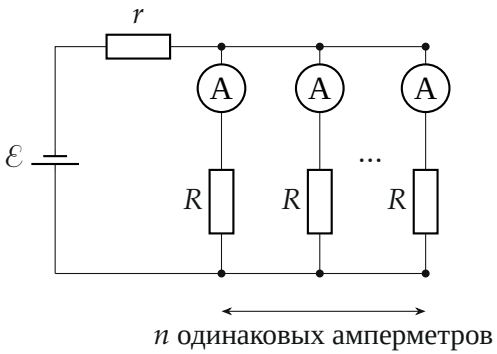
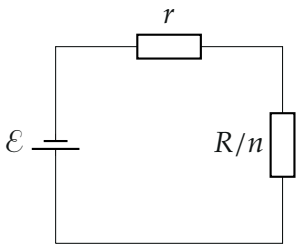


Схема опыта: n одинаковых амперметров параллельно, каждый — идеальный прибор и сопротивление R

2. Общее сопротивление. При параллельном соединении складываются проводимости: n/R, поэтому все амперметры заменяет одно сопротивление R/n (чем больше приборов, тем оно меньше). Источник нагружен на него, цепь — это внутреннее сопротивление r и R/n последовательно.



Эквивалентная схема: сопротивление R/n вместо n амперметров

3. Закон Ома для замкнутой цепи. Ток источника равен ЭДС, делённой на полное сопротивление цепи:

$$I_n = \frac{\mathcal{E}}{r + R/n}.$$

Запишем его для одного и для двух амперметров и разделим уравнения друг на друга, чтобы $\mathcal{E}$ ушла:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r+R}{r+R/2} \quad \Rightarrow \quad 1{,}2\left(r+\frac{R}{2}\right) = r+R \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\,r = 0{,}4\,R.$$

Отсюда

$$R = \frac{r}{2}.$$

Сопротивление амперметра вдвое меньше внутреннего сопротивления источника: прибор неидеален, но заметно лучше «короткого» источника.

4. Отношение $\mathcal{E}/r$. Подставим $R = r/2$ в закон Ома для одного амперметра:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+r/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathcal{E}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{3}{2}I_1 = 1{,}5\text{ А}.$$

Это ток короткого замыкания источника, то есть наибольший ток, который он способен дать.

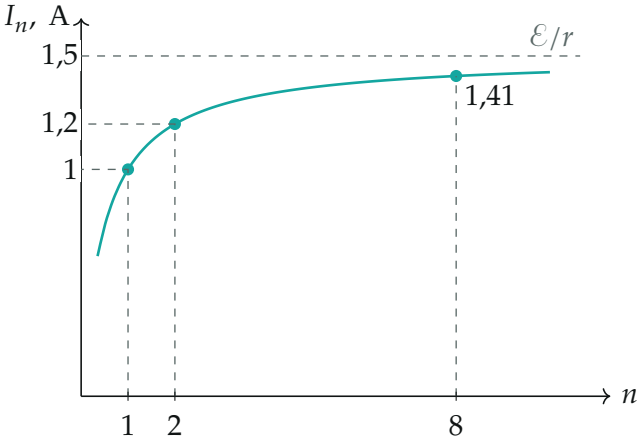
5. Восемь амперметров. Подставим $n = 8$ и $R = r/2$:

$$I_8 = \frac{\mathcal{E}}{r+R/8} = \frac{\mathcal{E}/r}{1+\dfrac{R}{8r}} = \frac{1{,}5\text{ А}}{1+\dfrac{1}{16}} = \frac{24}{17}\text{ А} \approx 1{,}41\text{ А}.$$

Тем же путём для любого n получаем

$$I_n = \frac{3n}{2n+1}\text{ А},$$

при $n = 1$ это 1 А, при $n = 2$ это 1,2 А, как в условии.



Сумма показаний $I_n = 3n/(2n+1)$ растёт с числом амперметров и не превосходит тока короткого замыкания $\mathcal{E}/r$

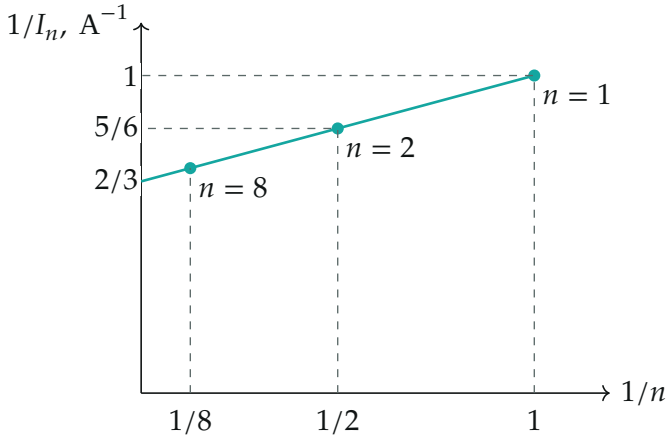
Второй способ. Запишем закон Ома через обратные величины:

$$\frac{1}{I_n} = \frac{r}{\mathcal{E}} + \frac{R}{\mathcal{E}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Величина $1/I_n$ линейно зависит от $1/n$, поэтому две точки определяют прямую, а по ней находится любая третья. Известны точки $1/n = 1$, $1/I = 1$ А$^{-1}$ и $1/n = 1/2$, $1/I = 5/6$ А$^{-1}$. Уменьшению $1/n$ на $1/2$ отвечает уменьшение $1/I_n$ на $1/6$, значит наклон прямой равен $1/3$ А$^{-1}$, а при $1/n = 1/8$

$$\frac{1}{I_8} = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{24}\ \text{А}^{-1} \quad \Rightarrow \quad I_8 = \frac{24}{17}\ \text{А}.$$

Этот результат получен без $\mathcal{E}$, r и R вообще.



Обратный ток $1/I_n$ — прямая в зависимости от $1/n$; точка $n = 8$ лежит на ней

Обратите внимание: I_8 — сумма показаний, а не показание одного прибора: каждый из восьми амперметров показывает $I_8/8 \approx 0{,}18$ А. А если считать амперметры идеальными ($R = 0$), получилось бы, что сумма не зависит от числа приборов, что противоречит условию ($I_1 \neq I_2$).

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/(r+R/n)$ — ампер, отношения R/r и I_2/I_1 безразмерны. Предел $n \to \infty$: приборы соединяют полюса источника с нулевым сопротивлением, $I_\infty = \mathcal{E}/r = 1{,}5$ А, и $I_8 = 1{,}41$ А лежит между $I_2 = 1{,}2$ А и этим пределом, как и должно быть. Общая формула второго способа даёт то же, что первый: $I_8 = \dfrac{4I_1I_2}{7I_1 - 3I_2} = \dfrac{4 \cdot 1 \cdot 1{,}2}{7 - 3{,}6} = \dfrac{24}{17}$ А. Физический смысл: добавляя амперметры, мы уменьшаем внешнее сопротивление, и ток растёт, но не быстрее, чем позволяет источник.

Ответ. $I_8 = \dfrac{4I_1I_2}{7I_1 - 3I_2} = \dfrac{24}{17}$ А $\approx 1{,}41$ А (при этом $R = r/2$, $\mathcal{E}/r = 1{,}5$ А).