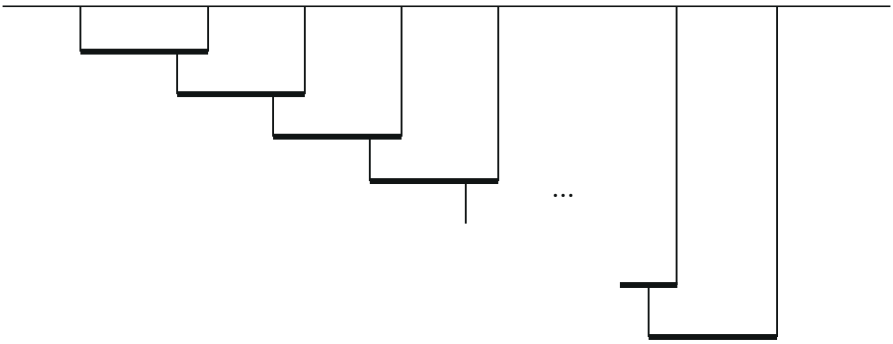
Цепочка из 2018 стержней

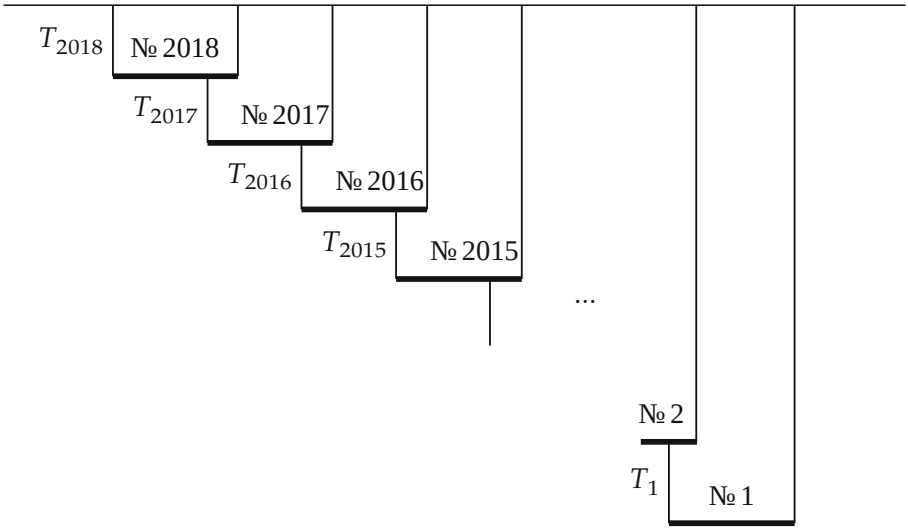
Задача 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, комплект 3, задача 2] Имеется 2018 одинаковых стержней массой $m = 1$ кг. Каждый стержень подвешен на двух нитях, прикрепленных к его концам. Левый стержень подвешен к горизонтальному потолку. Все остальные стержни подвешены так, что одна из нитей прикреплена к потолку, вторая — к «предыдущему» стержню в точке, отстоящей на одну пятую часть его длины от его правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать, что $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Цепочка висит в равновесии, значит, в равновесии каждый стержень по отдельности. Правый стержень подвешен на двух нитях, и про него всё известно из симметрии. Его левая нить прицеплена к соседу слева на $l/5$ от правого конца и нагружает его, а тот через свою левую нить нагружает следующего, и так далее до самого левого стержня. Идея: идти справа налево и для каждого стержня писать правило моментов относительно его правого конца: тогда неизвестная сила правой нити (она держится за потолок) в уравнение не входит. Получится рекуррентная формула: натяжение левой нити следующего стержня через натяжение предыдущего. Её решение — геометрическая прогрессия со знаменателем $1/5$, а при 2018 стержнях сумма практически не отличается от суммы бесконечной прогрессии.

Обозначения. Стержни нумеруем *справа налево*: №1 — правый, №2018 — самый левый, как на рисунке; l — длина стержня; T_k — сила

натяжения левой нити стержня №k, T'_k — правой. Левая нить стержня №k идёт к стержню №$(k+1)$ (у №2018 — к потолку), правая нить идёт к потолку. Нужно найти T_{2018}.



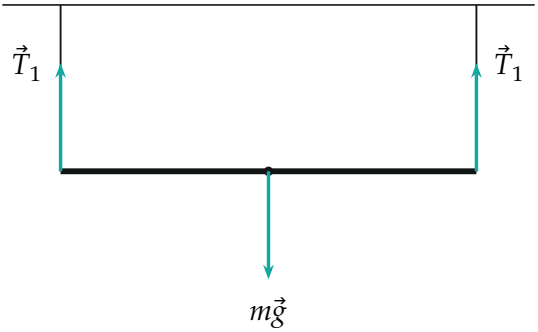
Нумерация стержней справа налево и натяжения левых нитей

1. Что нужно для равновесия. Нити вертикальны, стержни горизонтальны (как на рисунке), значит все силы вертикальны. Для стержня должны обращаться в нуль сумма сил и сумма моментов относительно любой точки. Моменты запишем относительно правого конца стержня: у правой нити там точка приложения, поэтому её сила T'_k момента не создаёт, и неизвестное уходит.

2. Правый стержень №1. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ в середине и две силы натяжения вверх на концах. Запишем условие равенства нулю моментов относительно правого конца: сила T_1 на плече l вращает стержень в одну сторону, сила тяжести на плече $l/2$ — в другую:

$$T_1\, l = mg\,\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{mg}{2}.$$

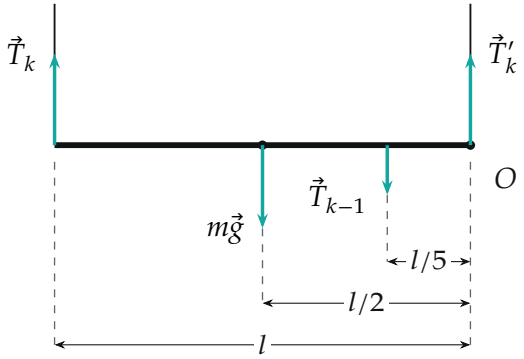
Тот же результат даёт симметрия: центр масс посередине, обе нити нагружены одинаково.



Правый стержень: две одинаковые силы натяжения уравновешивают силу тяжести

3. Стержень №k ($k \geq 2$). На него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ в середине; сила $\vec{T}_k$ левой нити вверх на левом конце; сила $\vec{T}'_k$ правой нити вверх на правом конце (точка O); и сила вниз от правой соседки: левая нить стержня №$(k-1)$ натянута с силой T_{k-1} и тянет вниз наш стержень в точке, отстоящей от O на $l/5$ (третий закон Ньютона). Условие равенства нулю моментов относительно O: сила T_k вращает стержень против силы тяжести и силы T_{k-1},

$$T_k\, l = mg\,\frac{l}{2} + T_{k-1}\,\frac{l}{5} \quad \Rightarrow \quad T_k = \frac{mg}{2} + \frac{T_{k-1}}{5}.$$



Стержень №k: силы и плечи относительно правого конца O

Для $k = 2$ и $k = 3$ получаем

$$T_2 = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 0{,}6\,mg, \qquad T_3 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2}{5} = 0{,}62\,mg.$$

Правило одно для каждого стержня: «половина своего веса плюс пятая часть натяжения справа».

4. Решаем рекуррентную формулу. Подставим T_{k-1} через T_{k-2} и так далее до $T_1 = mg/2$:

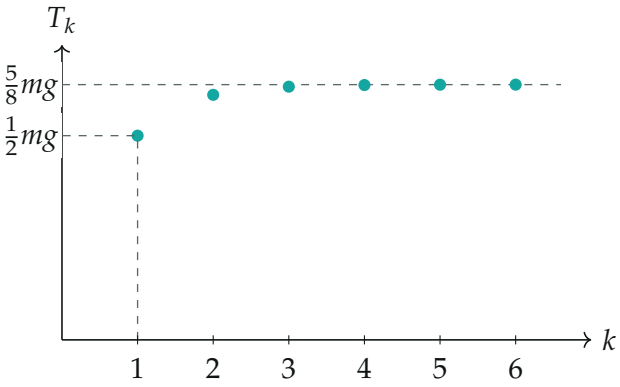
$$T_k = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{k-1}}\right) = \frac{mg}{2} \cdot \frac{1 - 5^{-k}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5mg}{8}\left(1 - 5^{-k}\right).$$

Здесь k слагаемых прогрессии со знаменателем $1/5$ (для $k = 1$ получаем $mg/2$, как в пункте 2).

5. Левая нить самого левого стержня.

$$T_{2018} = \frac{5mg}{8}\left(1 - 5^{-2018}\right) \approx \frac{5mg}{8} = \frac{5 \cdot 1\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2}{8} = 6{,}25\ \text{Н}.$$

Поправка $5^{-2018} \approx 10^{-1411}$ не имеет физического смысла (в ней нулей больше, чем атомов во Вселенной), поэтому приближённое равенство — точное для любых измерений.



Натяжение T_k быстро выходит на предел $5mg/8$

Второй способ. Для далёких стержней натяжения почти не меняются от номера к номеру: $T_k \approx T_{k-1} = T$. Подставим это в рекуррентную формулу:

$$T = \frac{mg}{2} + \frac{T}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}T = \frac{mg}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{5mg}{8}.$$

Отклонение от этого значения уменьшается в пять раз на каждом шаге: из рекуррентной формулы $T_k - T = \dfrac{T_{k-1} - T}{5}$, так что $T_k - T = -T \cdot 5^{-k}$, и мы снова получаем точную формулу пункта 4.

Обратите внимание: моменты нужно писать относительно правого конца стержня. Относительно любой другой точки в уравнение вошла бы сила правой нити T'_k, которую мы не знаем: она тоже зависит от всех стержней справа.

Проверка. Размерность: T — сила, $mg = 10$ Н.

Независимая проверка для стержня №2: моменты относительно *левого* конца дают для правой нити

$$T'_2\, l = mg\, \frac{l}{2} + T_1\, \frac{4l}{5} \quad \Rightarrow \quad T'_2 = 0{,}9\, mg,$$

а баланс сил даёт $T'_2 = mg + T_1 - T_2 = (1 + 0{,}5 - 0{,}6)\, mg = 0{,}9\, mg$. Два способа совпали.

Предел: пусть нить прицеплена на долю a длины от правого конца. Тогда $T_k = \dfrac{mg}{2} + aT_{k-1}$ и при большом числе стержней $T = \dfrac{mg}{2(1-a)}$. При $a = 0$ (нить на самом конце, не создаёт момента) стержни не нагружают друг друга и $T = mg/2$, при $a = 1/5$ — наш ответ.

Физический смысл: каждый следующий сосед передаёт на пятую часть меньше, поэтому дальние стержни почти ничего не добавляют, и ответ не зависит от числа стержней, если их больше десяти.

Ответ. $T = \dfrac{5mg}{8}\left(1 - 5^{-2018}\right) \approx \dfrac{5mg}{8} = 6{,}25$ Н.