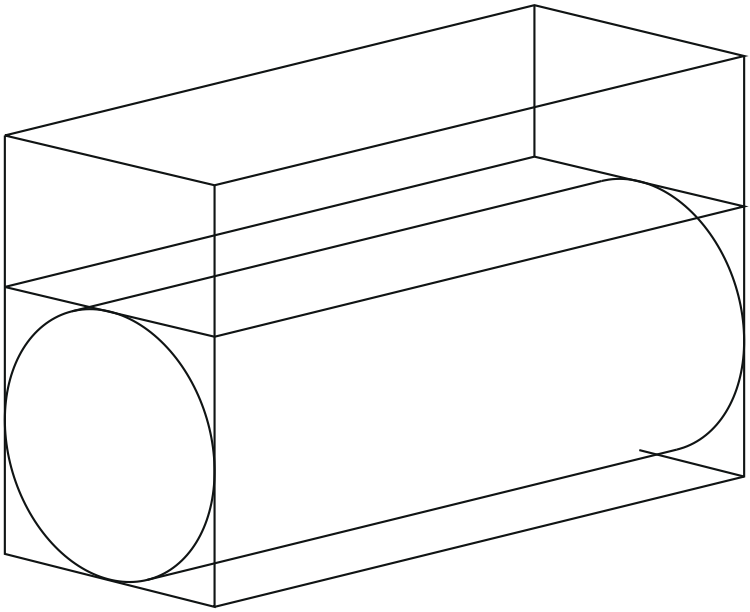
Цилиндр в кювете с водой

Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, комплект 3, задача 3] Однородный цилиндр радиусом R и высотой h положили в кювету в форме прямоугольного параллелепипеда, длина которой на очень небольшую величину превосходит длину цилиндра h, а ширина — диаметр цилиндра, так, что цилиндр можно положить в кювету с очень небольшими зазорами между ним и стенками кюветы. Затем в кювету налили воду, которая только-только покрывает цилиндр (см. рисунок). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды? Плотность воды ρ, плотность материала цилиндра 6ρ.



▲ **Решение. Что происходит.** Минимальная работа — работа при медленном подъёме: ни скорости, ни тепла. Тогда вся работа внешней силы уходит на приращение потенциальной энергии системы «цилиндр + вода». Цилиндр поднимается, а вода занимает освободившееся место внизу и опускается, поэтому её потенциальная энергия убывает. Главная идея: потенциальная энергия тела равна mgy_c, где y_c — высота центра

масс, поэтому достаточно узнать, на сколько поднялся центр цилиндра и как сместился центр масс воды. Класс задачи: «работа = ΔU» для двух тел, одно из которых жидкость; вода несжимаема, её объём не меняется.

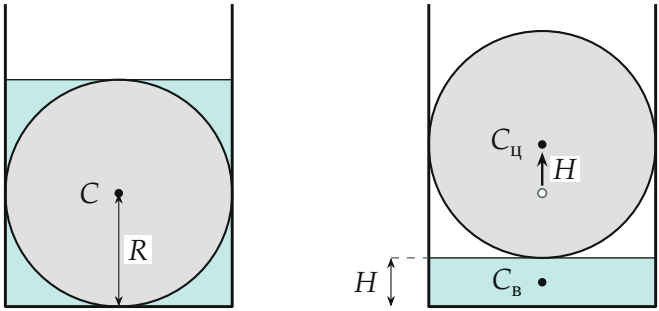
Обозначения. Высоты отсчитываем от дна кюветы вверх. $V = \pi R^2 h$ — объём цилиндра, $M = 6\rho V$ — его масса; $m_в$ — масса воды; H — толщина слоя воды на дне кюветы, когда цилиндра в воде уже нет. Всё происходит одинаково вдоль оси цилиндра, поэтому достаточно разреза, перпендикулярного оси. Зазоры малы: цилиндр касается стенок, вода проходит мимо.

1. Масса воды. Вода доходит до верха цилиндра, то есть до высоты $2R$. В разрезе вода занимает квадрат $2R \times 2R$ без круга радиуса R, поэтому

$$V_в = \left(4R^2 - \pi R^2\right) h = (4 - \pi) R^2 h, \qquad m_в = (4 - \pi)\rho R^2 h.$$

2. Конечное положение и высота подъёма. Цилиндр вытащен, когда его нижняя точка вышла из воды. Тогда вся вода лежит ровным слоем на дне кюветы, площадь дна $2R \cdot h$, и объём слоя тот же, что был:

$$2Rh \cdot H = (4 - \pi) R^2 h \quad \Rightarrow \quad H = \frac{(4 - \pi) R}{2} \approx 0{,}43\, R.$$



Разрез кюветы: цилиндр поднялся на H, центр масс воды опустился с высоты R до $H/2$

Нижняя точка цилиндра в этот момент на высоте H (на поверхности слоя), значит, центр цилиндра поднялся с высоты R на высоту $R+H$, то есть ровно на H.

3. Энергия цилиндра. Потенциальная энергия цилиндра выросла на

$$\Delta U_{\text{ц}} = Mg\,H = 6\rho\pi R^2 h g \cdot \frac{(4-\pi)R}{2} = 3\pi(4-\pi)\,\rho g h R^3.$$

4. Энергия воды. В начале вода — это квадрат без круга. Квадрат и круг имеют общий центр на высоте R, поэтому и у остатка центр масс на высоте R (момент квадрата $4R^2\cdot R$ минус момент круга $\pi R^2\cdot R$, деленный на площадь остатка $(4-\pi)R^2$, даёт R). В конце вода — слой толщиной H, центр масс на высоте $H/2$. Центр масс воды опустился на

$$R - \frac{H}{2} = R - \frac{(4-\pi)R}{4} = \frac{\pi R}{4},$$

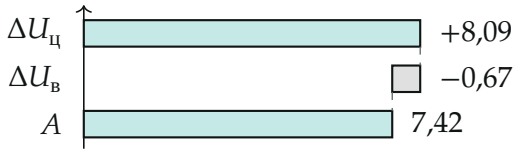
и её потенциальная энергия *уменьшилась*:

$$\Delta U_{\text{в}} = -m_{\text{в}} g \cdot \frac{\pi R}{4} = -\frac{\pi(4-\pi)}{4}\,\rho g h R^3.$$

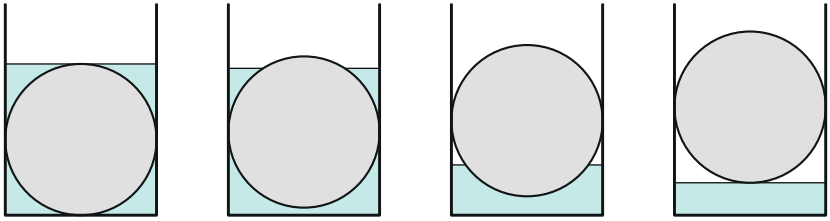
5. Работа. Работа внешней силы равна изменению энергии системы:

$$A = \Delta U_{\text{ц}} + \Delta U_{\text{в}} = \pi(4-\pi)\,\rho g h R^3 \left(3 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{11\pi(4-\pi)}{4}\,\rho g h R^3 \approx 7{,}42\,\rho g h R^3.$$

Вода, опускаясь, отдаёт часть энергии, поэтому вытаскивать цилиндр легче, чем в воздухе, где работа была бы $\Delta U_{\text{ц}} \approx 8{,}09\,\rho g h R^3$.



Вклады в работу, в единицах $\rho g h R^3$



Как цилиндр выходит из воды при подъёме: уровень воды сначала почти не меняется, потом резко падает, когда водой перекрыта вся ширина кюветы

Второй способ: через силу. Пусть цилиндр поднят на z. Чтобы медленно поднимать его дальше, нужна сила $F(z) = Mg - \rho g V_{\text{п}}(z)$, где $V_{\text{п}} = BV$ — объём погружённой в воду части цилиндра (B — её доля, от 1 до 0), а $\rho g V_{\text{п}}$ — сила Архимеда. Работа — интеграл силы:

$$A = \int_0^H F\,dz = MgH - \rho g V \int_0^H B\,dz.$$

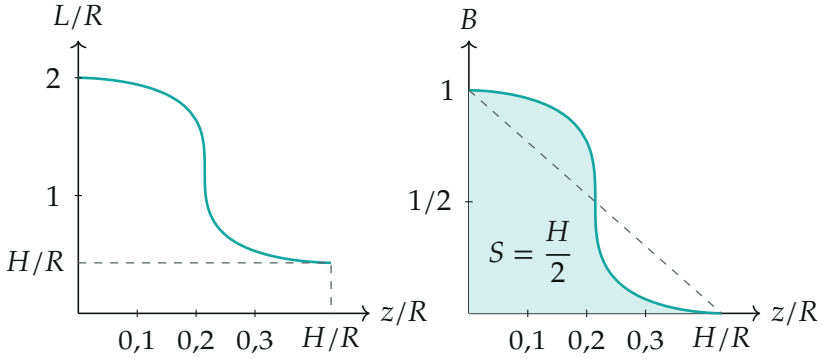
Доля $B(z)$ получается из сохранения объёма воды. Уровень воды $L(z)$ находится из условия «объём воды в кювете не изменился»: площадь прямоугольника ширины $2R$ и высоты L минус площадь погружённой части круга равна $(4-\pi)R^2$. Решение уравнения и интеграл посчитаны на компьютере (графики на рисунке):

$$\int_0^H B\,dz = 0{,}2146\,R = \frac{H}{2}.$$

Площадь под графиком $B(z)$ вдвое меньше прямоугольника $H \times 1$: в среднем цилиндр погружён наполовину. Тогда

$$A = 6\rho V g H - \rho V g \frac{H}{2} = \frac{11}{2}\rho V g H$$
$$= \frac{11}{2}\rho\pi R^2 h\, g \cdot \frac{(4-\pi)R}{2} = \frac{11\pi(4-\pi)}{4}\rho g h R^3,$$

что совпадает с первым способом.



Слева — уровень воды при подъёме цилиндра, справа — доля погружённого объёма; площадь под правым графиком равна $H/2$

Обратите внимание: цилиндр нужно поднять не на $2R$ и не на h, а лишь на $H \approx 0{,}43R$: к моменту выхода уровень воды успевает опуститься с $2R$ до H. И центр масс воды опускается, а не остаётся на месте: если им пренебречь, получится ответ $8{,}09\,\rho g h R^3$, завышенный примерно на 9 %.

Проверка. Размерность: $\rho g h R^3$ — (кг/м^3)(м/с^2)(м)(м^3) = кг·м^2/с^2 — джоуль. Для цилиндра произвольной плотности $\rho_ц$ тем же рассуждением $A = (\rho_ц - \rho/2)\,VgH$. При $\rho_ц \to \infty$ работа стремится к MgH, то есть к подъёму на H в воздухе. При $\rho_ц = 6\rho$ получаем $\frac{11}{2}\rho VgH$. Для плотности 3ρ та же формула дала бы $\dfrac{5\pi(4-\pi)}{4}\,\rho g h R^3 \approx 3{,}37\,\rho g h R^3$: именно этот ответ стоит в опубликованном решении организаторов, где масса цилиндра записана как $3\rho V$, хотя по условию плотность 6ρ. Физический смысл: средняя архимедова сила на пути подъёма равна $\rho Vg/2$.

Ответ. $A = \dfrac{11\pi(4-\pi)}{4}\,\rho g\, hR^3 \approx 7{,}42\,\rho g h R^3$.