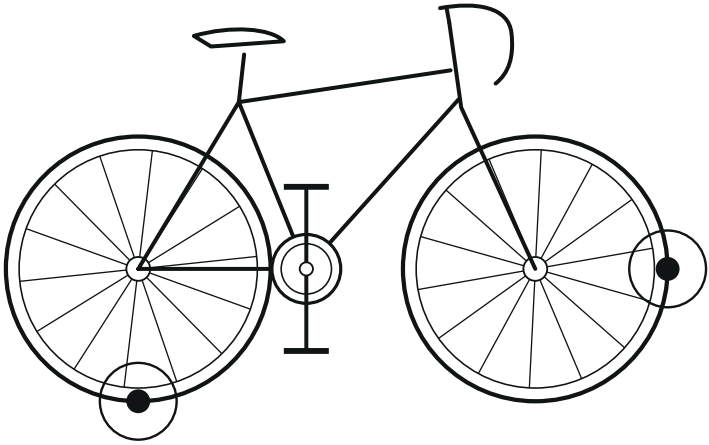
Камни на колёсах велосипеда

Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, комплект 3, задача 4] В протекторе покрышек переднего и заднего колес велосипеда застряли два маленьких камня. В тот момент, когда камень на заднем колесе касается земли, камень на переднем находится в крайнем переднем положении (см. рисунок; камни обведены кружками). Найти минимальное расстояние между камнями в процессе движения велосипеда. Через какое минимальное время после положения, показанного на рисунке, расстояние между камнями достигает минимального значения? Скорость велосипеда v, радиус колес R, расстояние между центрами колес — $3R$. Колеса не проскальзывают по дороге.



▲ **Решение. Что происходит.** Колёса одинаковы и катятся без проскальзывания, поэтому вращаются с одной и той же угловой скоростью $\omega = v/R$. Каждый камень движется по окружности радиуса R вокруг центра своего колеса; в начальный момент один камень внизу, другой впереди, то есть радиусы к камням составляют прямой угол, и этот угол не меняется. Расстояние между двумя точками одинаково во всех системах отсчёта, которые движутся друг относительно друга поступательно, поэтому перейдём в систему отсчёта велосипеда: центры колёс неподвижны на расстоянии $3R$, колёса вращаются на месте с ω. Вектор от первого

камня ко второму равен сумме постоянного вектора между центрами и вектора, который вращается с постоянной длиной и скоростью ω. Это относительное движение двух точек, вращающихся с одинаковой угловой скоростью: расстояние между ними — расстояние от начала координат до точки, которая обегает окружность.

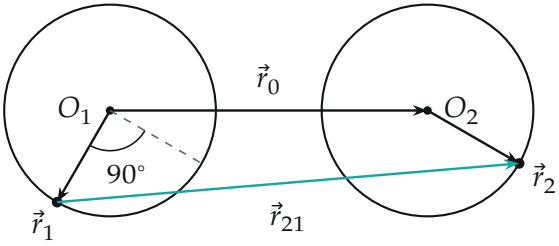
Обозначения. O_1, O_2 — центры заднего и переднего колёс; $\vec{r}_0$ — вектор от O_1 к O_2, $|\vec{r}_0| = 3R$; $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — радиус-векторы заднего и переднего камней относительно центров своих колёс, $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = R$; $\vec{r}_{21}$ — радиус-вектор переднего камня относительно заднего. Велосипед едет вправо, колёса вращаются по часовой стрелке. Время t отсчитываем от положения на рисунке, ωt — угол поворота колёс.

1. Угловая скорость колёс. Колесо катится без проскальзывания: точка касания с дорогой неподвижна, центр колеса движется со скоростью v, поэтому

$$v = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

У обоих колёс радиус один, значит, ω одна и та же.

2. Угол между радиусами к камням. В начальный момент $\vec{r}_1$ направлен вниз, $\vec{r}_2$ — вправо, то есть $\vec{r}_2$ получается поворотом $\vec{r}_1$ на 90° против часовой стрелки. За время t оба вектора поворачиваются на один и тот же угол ωt по часовой стрелке, поэтому угол между ними остаётся прямым в любой момент.



Произвольный момент: радиусы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ образуют прямой угол (пунктиром $\vec{r}_2$ перенесён в центр заднего колеса)

3. Вектор между камнями. Пройдём от первого камня ко второму через центры колёс: от первого камня к O_1 — вектор $-\vec{r}_1$, от O_1 к O_2 —

$\vec{r}_0$, от O_2 ко второму камню — $\vec{r}_2$:

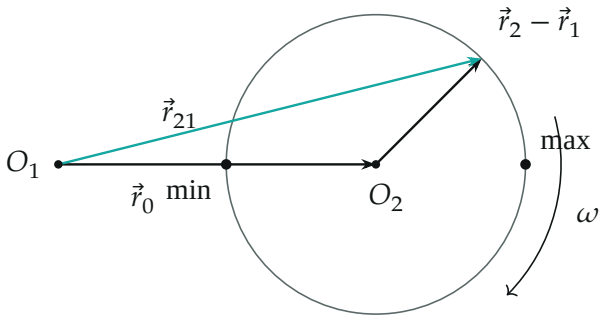
$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_0 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\,.$$

4. Разность $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Её длина по теореме Пифагора (угол между векторами 90°, оба длиной R)

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}\,R,$$

и она не меняется. В начальный момент $\vec{r}_1 = (0; -R)$ и $\vec{r}_2 = (R; 0)$ (ось x — вправо, ось y — вверх), поэтому $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (R; R)$ направлен под 45° к горизонту. Оба вектора повёрнуты колёсами на ωt по часовой стрелке, значит, и разность вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω и в момент t направлена под углом $45° - \omega t$.

5. Сложение векторов. Вектор $\vec{r}_{21}$ идёт из начала в конец вектора $\vec{r}_0$ (длина $3R$) и затем ещё на длину $\sqrt{2}R$ под переменным углом. Его конец обегает окружность радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце $\vec{r}_0$. Расстояние между камнями — длина $\vec{r}_{21}$ — наименьшее, когда разность $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ направлена против $\vec{r}_0$, и наибольшее, когда по $\vec{r}_0$.



Сложение векторов: конец $\vec{r}_{21}$ лежит на окружности радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в конце $\vec{r}_0$; min *и* max *— положения наименьшей и наибольшей длины*

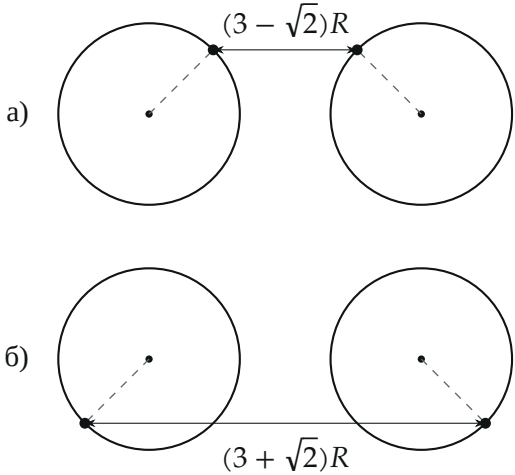
6. Наименьшее расстояние. При направлении «против $\vec{r}_0$» длины вычитаются:

$$r_{21}^{\min} = 3R - \sqrt{2}R = (3 - \sqrt{2})\,R \approx 1{,}59\,R.$$

7. Время. Разность направлена против $\vec{r}_0$, когда её угол равен 180° (с точностью до целого оборота): $45^\circ - \omega t = -180^\circ$, откуда первый раз после начала

$$\omega t = 225^\circ = \frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad t_{\min} = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi R}{4v}.$$

Это первый минимум: расстояние растёт до $\omega t = \pi/4$ и затем убывает (график ниже).



Положения камней: а) в момент наименьшего расстояния, б) в момент наибольшего; камни на одной высоте

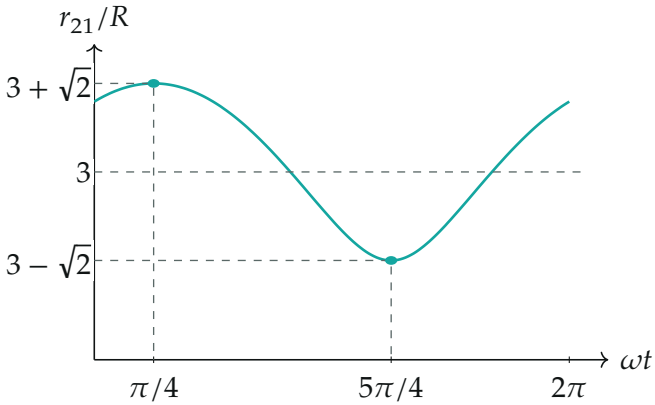
Второй способ: в координатах. Выберем начало в центре заднего колеса. Тогда камни в момент t имеют координаты

$$\vec{r}_1 = R\,(-\sin\omega t;\, -\cos\omega t), \qquad \vec{r}_2 = (3R + R\cos\omega t;\; -R\sin\omega t)\,,$$

если считать вектор $\vec{r}_1$ повёрнутым из направления вниз и $\vec{r}_2$ из направления вправо на угол ωt по часовой стрелке. Квадрат расстояния

$$\begin{aligned} r_{21}^2 &= R^2\left[(3+\cos\omega t+\sin\omega t)^2 + (\cos\omega t - \sin\omega t)^2\right] \\ &= R^2\left[11 + 6\sqrt{2}\cos\left(\omega t - 45^\circ\right)\right]. \end{aligned}$$

Минимум достигается при $\cos(\omega t - 45^\circ) = -1$, то есть $\omega t = 225^\circ$, значение $r_{21}^2 = R^2\,(11 - 6\sqrt{2}) = R^2(3 - \sqrt{2})^2$. Получено то же самое.



Расстояние между камнями колеблется между $(3 - \sqrt{2})R$ и $(3 + \sqrt{2})R$ с периодом оборота колеса

Обратите внимание: в системе отсчёта дороги камни движутся по сложным кривым (циклоидам), но расстояние между ними от системы отсчёта не зависит, поэтому достаточно системы велосипеда, где движение простое.

Проверка. Размерность: r_{21} — длина, t — время (R/v). В начальный момент по формуле $r_{21} = R\sqrt{11 + 6\sqrt{2}\cos(-45^\circ)} = R\sqrt{17}$, а прямо по рисунку камни в точках $(0; -R)$ и $(4R; 0)$, расстояние $\sqrt{16R^2 + R^2} = \sqrt{17}R \approx 4{,}12R$ — совпало. Минимум положителен: камни не сталкиваются, так как $3R > \sqrt{2}R$. Физический смысл: в системе велосипеда конец вектора между камнями обегает окружность радиуса $\sqrt{2}R$ вокруг точки на расстоянии $3R$, поэтому расстояние колеблется между $3R - \sqrt{2}R$ и $3R + \sqrt{2}R$ с периодом оборота колеса.

Ответ. $r_{\min} = (3 - \sqrt{2})\,R \approx 1{,}59\,R$; $\quad t_{\min} = \dfrac{5\pi R}{4v}$.