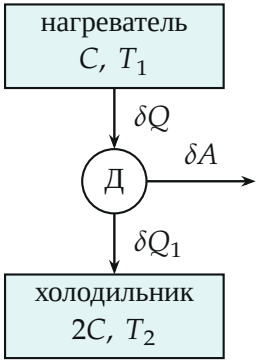
Тепловой двигатель из двух тел

Задача 5. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, комплект 3, задача 5] Два тела с теплоемкостями $2C$ и C имеют температуры T и $3T$ соответственно. Какая минимальная температура может установиться в этой системе, если тела использовать в качестве нагревателя и холодильника теплового двигателя, а произведенная механическая работа будет «уходить» из системы? Какую максимальную работу можно получить в такой системе тел? Других потерь энергии в рассматриваемой системе нет.



Поясняющий рисунок: тепловой двигатель Д между двумя телами; работа δA уходит из системы

▲ **Решение.** **Что происходит.** У тел конечные теплоёмкости, поэтому по мере работы двигателя нагреватель остывает, а холодильник нагревается; двигатель останавливается, когда температуры сравняются. Чем больше работы ушло из системы, тем меньше энергии осталось у тел и тем ниже их общая конечная температура. Значит, минимальная температура и максимальная работа — две стороны одного и того же процесса, в котором двигатель работает идеально: обратимо, по циклам Карно. Главная идея: в обратимом процессе полная энтропия нагревателя и холодильника не меняется. Это задача на квазистатический процесс между теми же состояниями: энтропия тел определяется их температурами, а работа находится из закона сохранения энергии.

Обозначения. Нагреватель — тело с теплоёмкостью C (начальная температура $3T$, текущая T_1), холодильник — с теплоёмкостью $2C$ (начальная T, текущая T_2); T_f — общая конечная температура; A — вся работа, ушедшая из системы.

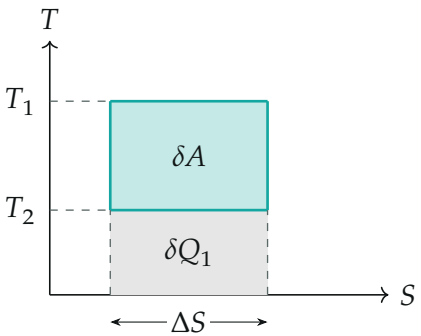
1. Работа через конечную температуру. Тела обмениваются теплотой только через двигатель, а остальная энергия уходит как работа. Нагреватель отдал количество теплоты $C(3T - T_f)$, холодильник получил $2C(T_f - T)$; по закону сохранения энергии (первому началу) работа равна разности:

$$A = C(3T - T_f) - 2C(T_f - T) = C\,(5T - 3T_f).$$

Чем ниже T_f, тем больше A, поэтому оба вопроса сводятся к одному: найти наименьшую возможную T_f.

2. Малый цикл Карно. Пусть в какой-то момент температуры $T_1 > T_2$. Двигатель на малом цикле берёт у нагревателя малое количество теплоты δQ (чтобы температуры почти не изменились), отдаёт холодильнику δQ_1 и совершает работу $\delta A = \delta Q - \delta Q_1$. Для обратимого цикла Карно

$$\frac{\delta Q}{T_1} = \frac{\delta Q_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \delta Q_1 = \frac{T_2}{T_1}\,\delta Q,$$



Малый цикл Карно на диаграмме T–S

то есть КПД $\eta = 1 - \delta Q_1/\delta Q = 1 - T_2/T_1$. На диаграмме T–S цикл — прямоугольник, у которого обе горизонтали имеют длину ΔS: нагре-

ватель отдаёт $T_1\Delta S$, холодильник получает $T_2\Delta S$, работа — площадь $(T_1 - T_2)\Delta S$.

3. Как меняются температуры. Нагреватель отдал δQ и остыл, холодильник получил δQ_1 и нагрелся:

$$dT_1 = -\frac{\delta Q}{C}, \qquad dT_2 = \frac{\delta Q_1}{2C} = \frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{\delta Q}{2C}.$$

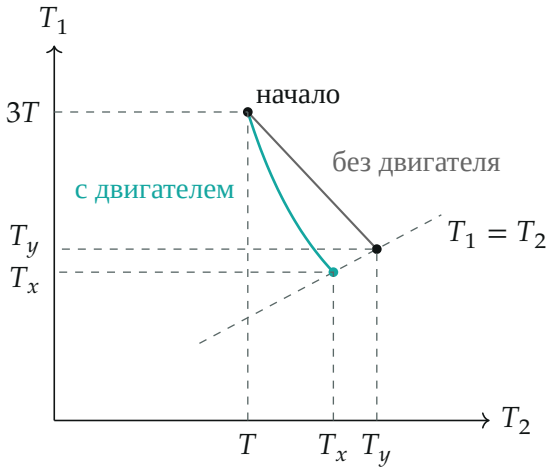
4. Что при этом не меняется. Поделим первое равенство на T_1, второе на T_2:

$$\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{\delta Q}{C\,T_1}, \qquad \frac{dT_2}{T_2} = \frac{\delta Q}{2C\,T_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_1}{T_1} + 2\,\frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

Левая часть — это $d\ln\left(T_1T_2^2\right)$, поэтому $T_1T_2^2$ в процессе постоянно. Начальные температуры $T_1 = 3T$, $T_2 = T$ дают

$$T_1T_2^2 = 3T\cdot T^2 = 3T^3.$$

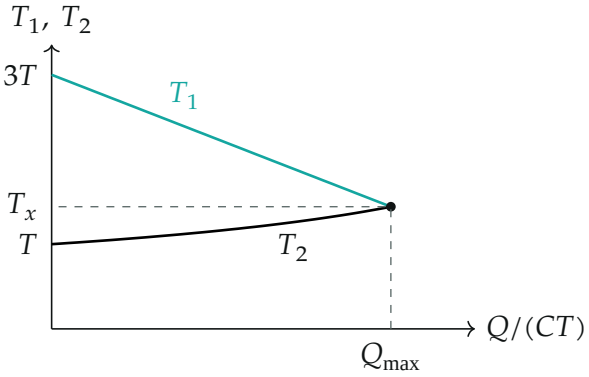
Это та же энтропия: $dS_1 + dS_2 = 0$ для нагревателя ($dS_1 = -\delta Q/T_1$) и холодильника ($dS_2 = \delta Q_1/T_2$).



Как меняются температуры: с идеальным двигателем точка движется по кривой $T_1T_2^2 = 3T^3$, при прямом теплообмене — по прямой $T_1 + 2T_2 = 5T$

5. Минимальная температура. Двигатель останавливается, когда $T_1 = T_2 = T_f$:

$$T_f \cdot T_f^2 = 3T^3 \quad \Rightarrow \quad T_{\min} = \sqrt[3]{3}\,T \approx 1{,}44\,T.$$



Нагреватель остывает линейно, холодильник нагревается медленнее; они сходятся в $T_{\min}$, когда двигатель отдал холодильнику теплоту $Q_{\max}$

6. Максимальная работа. Подставим $T_f = T_{\min}$ в пункт 1:

$$A_{\max} = C\left(5T - 3\sqrt[3]{3}\,T\right) = CT\left(5 - 3\sqrt[3]{3}\right) \approx 0{,}673\,CT.$$

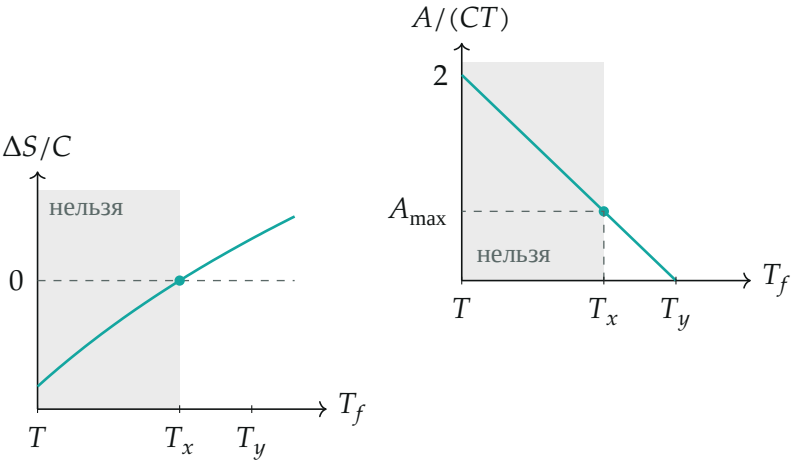
Для сравнения: без двигателя из баланса $C(3T - T_y) = 2C(T_y - T)$ получается $T_y = 5T/3 \approx 1{,}67\,T$, и работа равна нулю.

Второй способ: энтропия. Тела вместе и никакие другие — система, в которой энтропия при любом процессе не убывает. Энтропия тела с теплоёмкостью C_i при изменении температуры от $T_{\text{нач}}$ до T_f меняется на $C_i \ln(T_f/T_{\text{нач}})$, поэтому

$$\Delta S = C\ln\frac{T_f}{3T} + 2C\ln\frac{T_f}{T} = C\ln\frac{T_f^3}{3T^3} \;\geq\; 0 \quad \Rightarrow \quad T_f \geq \sqrt[3]{3}\,T.$$

Ниже $\sqrt[3]{3}\,T$ температура опуститься не может: энтропия бы убывала. Знак равенства — обратимый процесс, то есть именно цикл Карно. Тот

же результат: $T_{\min} = \sqrt[3]{3}\,T$.



Слева — изменение энтропии тел в зависимости от конечной температуры, справа — работа; серым отмечена недостижимая область

Обратите внимание: «минимальная температура» и «максимальная работа» относятся к одному процессу: нельзя, например, взять двигатель с КПД меньше цикла Карно и получить ту же T_f.

Проверка. Размерность: CT — энергия (C в Дж/К). Предел: для нагревателя T_h и холодильника T_c те же рассуждения дают $T_f = \sqrt[3]{T_h T_c^2}$ и $A = C\,(T_h + 2T_c - 3T_f)$; при $T_h = T_c$ получаем $T_f = T_c$, $A = 0$: у равных по температуре тел двигателю нечего брать. Численный расчёт по малым циклам Карно даёт $T_f \approx 1{,}4422\,T$ и $A \approx 0{,}6733\,CT$, как по формулам. Смысл: из внутренней энергии $5CT$ в работу переходит около 13 %.

Ответ. $T_{\min} = \sqrt[3]{3}\,T \approx 1{,}44\,T$; $\quad A_{\max} = CT\left(5 - 3\sqrt[3]{3}\right) \approx 0{,}673\,CT$.