Освещённость за двумя линзами

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 1] Две собирающие линзы одинакового диаметра вставлены в трубу с зачерненными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой, и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу падает пучок параллельных лучей одинаковой интенсивности сначала слева, а потом справа. Найти отношение освещенностей экрана, расположенного соответственно справа и слева от трубы.

Указание. Освещенностью поверхности называется отношение световой энергии, падающей на малый элемент поверхности, к его площади.

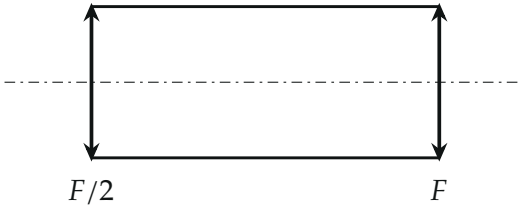


Рисунок условия: слева линза с фокусным расстоянием $F/2$, справа — с F

▲ **Решение. Что происходит.** Две линзы с общим фокусом образуют телескопическую систему: параллельный пучок на входе остаётся параллельным на выходе, но меняет ширину. Слева стоит линза с меньшим фокусным расстоянием, справа — с большим. Если пучок идёт слева, он после трубы стал бы вдвое шире, а правая линза того же диаметра, что и левая, срезает его периферию, и часть энергии уходит в зачернённые стенки. Если пучок идёт справа, он сужается вдвое, и вся энергия проходит. Освещённость — это энергия, делённая на площадь, поэтому в каждом из двух случаев нужно ответить на два вопроса: какая доля энергии прошла трубу и на какую площадь она легла.

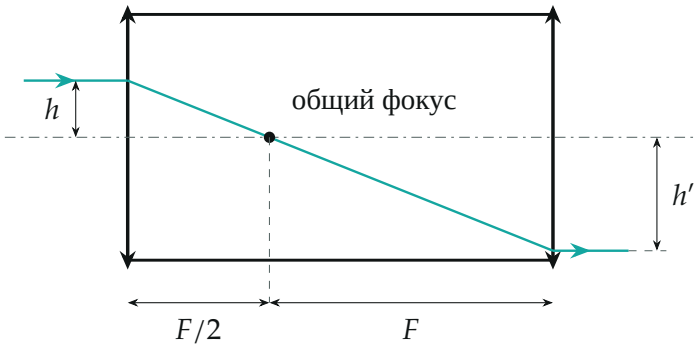
Обозначения. Ось x — вдоль оси трубы, y — высота луча над осью. R — радиус линз (пучок заполняет их целиком, всё, что шире, в трубу не

попадает); I — освещённость поперечной площадки в падающем пучке; $f_1 = F/2$ — фокусное расстояние левой линзы, $f_2 = F$ — правой; $E_{\text{пр}}$ — освещённость экрана справа от трубы при пучке слева, $E_{\text{лев}}$ — экрана слева при пучке справа. Экран стоит вплотную к трубе перпендикулярно оси; выходной пучок параллельный, поэтому расстояние до экрана ничего не меняет. Потерь на отражение в линзах нет.

1. Расстояние между линзами и связь высот. Луч, идущий на высоте h параллельно оси, после левой линзы проходит через её задний фокус. Чтобы после правой линзы он снова шёл параллельно оси, он должен идти из переднего фокуса правой линзы (луч из фокуса линза делает параллельным оси). Значит, задний фокус левой линзы совпадает с передним фокусом правой, и расстояние между линзами равно $f_1 + f_2 = 3F/2$. Из подобия двух треугольников с вершиной в общем фокусе (катеты h, f_1 и h', f_2) высота луча на правой линзе

$$h' = h\frac{f_2}{f_1} = 2h,$$

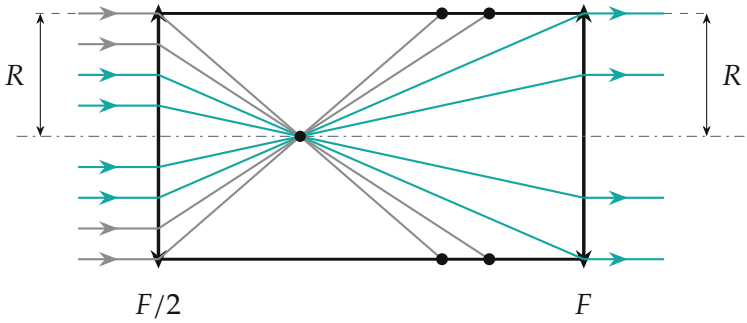
причём луч оказывается по другую сторону оси: пучок на выходе перевёрнут, но параллелен.



Луч высоты h идёт через общий фокус и выходит параллельно оси на высоте $h' = 2h$

2. Пучок идёт слева. Для каждого луча вопрос один: попадёт ли он на правую линзу или в стенку. На правой линзе высота луча равна $2h$,

а радиус линзы R, поэтому проходят лучи с $2h \le R$, то есть $h \le R/2$. Остальные лучи пучка упираются в стенку и поглощаются.



Пучок слева: бирюзовые лучи ($h \le R/2$) выходят на экран, серые упираются в стенку (чёрные точки)

Лучи с $h \le R/2$ составляют внутри падающего пучка круг радиуса $R/2$, а это четверть его площади πR^2. Пучок однородный, поэтому на экран выходит четверть падающей на левую линзу энергии $W = I\pi R^2$:

$$W_{\text{пр}} = I\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{W}{4}.$$

Эти лучи выходят на высотах $2h \le R$, то есть заполняют круг радиуса R — ту же площадь πR^2, что и на входе. Поэтому

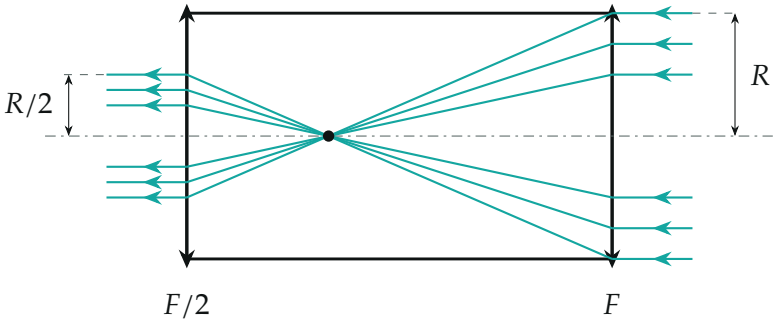
$$E_{\text{пр}} = \frac{W_{\text{пр}}}{\pi R^2} = \frac{I}{4}.$$

Площадь пучка не изменилась, а энергия упала вчетверо.

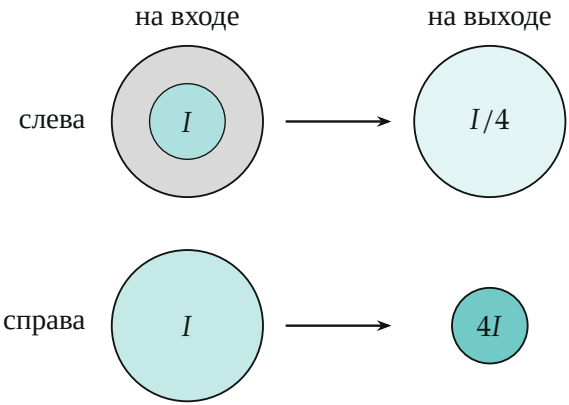
3. Пучок идёт справа. Теперь первой стоит линза с $f = F$, второй — с $F/2$, и высота луча на второй линзе равна $h\,(F/2)/F = h/2 \le R/2 < R$. Значит, проходят все лучи: вся энергия $W = I\pi R^2$ доходит до экрана. Выходной пучок — круг радиуса $R/2$ площадью $\pi R^2/4$:

$$E_{\text{лев}} = \frac{W}{\pi R^2/4} = 4I.$$

Энергия осталась прежней, а площадь уменьшилась вчетверо.



Пучок справа: все лучи доходят до выхода, радиус пучка уменьшается вдвое



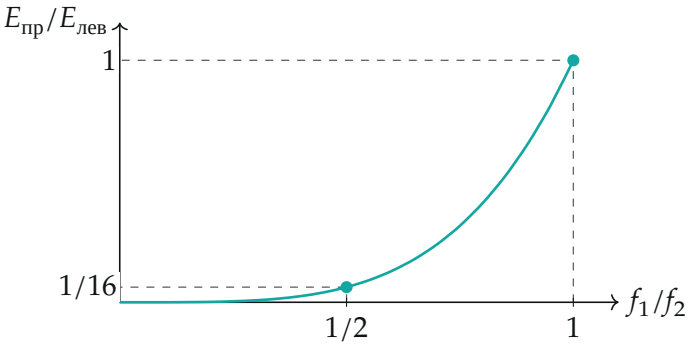
Поперечное сечение пучка: серое кольцо — энергия, ушедшая в стенки; цвет показывает освещённость

4. Отношение. В первом случае освещённость упала вчетверо, во втором выросла вчетверо:

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{лев}}} = \frac{I/4}{4I} = \frac{1}{16}.$$

Обратите внимание: ответ не $1/4$ и не 4. Слева убывает энергия при той же площади, справа убывает площадь при той же энергии, и два множителя перемножаются: слева освещённость уменьшается в $(f_2/f_1)^2$ раз, справа возрастает во столько же.

Проверка. Размерность: отношение освещённостей безразмерно. Тот же расчёт для произвольных $f_1 < f_2$ даёт $E_{\text{пр}}/E_{\text{лев}} = (f_1/f_2)^4$: слева проходит доля $(f_1/f_2)^2$ энергии, справа площадь уменьшается во столько же раз. При $f_1 = f_2$ получается единица: симметричная труба не отличает направлений. Для $f_1/f_2 = 1/2$ имеем $(1/2)^4 = 1/16$.



Отношение освещённостей $(f_1/f_2)^4$ в зависимости от отношения фокусных расстояний; точка $f_1/f_2 = 1/2$ — ответ задачи

Физический смысл: труба из двух линз с общим фокусом пропускает «сжатый» пучок целиком, а «растянутый» обрезает, поэтому освещённость на экране зависит от того, с какой стороны светят.

Ответ. $\dfrac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{лев}}} = \dfrac{1}{16}$ (справа от трубы при пучке слева освещённость $I/4$, слева при пучке справа — $4I$).