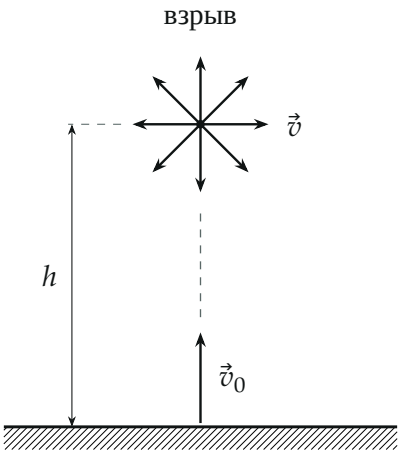
Осколки гранаты

Задача 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 2] Граната брошена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. В верхней точке своей траектории граната разрывается на множество осколков, которые разлетаются во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение интервала времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?



Поясняющий рисунок: граната в верхней точке разрывается, осколки летят во все стороны с одинаковой по модулю скоростью v

▲ **Решение. Что происходит.** Осколки вылетают из одной точки с одинаковой скоростью по модулю, но в разные стороны. Сила тяжести действует вертикально, поэтому вертикальное и горизонтальное движения независимы, а время падения на землю определяется только вертикальной составляющей начальной скорости. Чем она сильнее направлена вниз, тем раньше осколок упадёт. Значит, первым падает осколок, летящий вертикально вниз, последним — летящий вертикально вверх. Разность этих двух времён известна и равна Δt: из неё найдём v, а затем время падения первого осколка.

Обозначения. h — высота точки взрыва над землёй (она же верхняя точка траектории гранаты); v — скорость каждого осколка сразу после

взрыва; u — проекция этой скорости на вертикальную ось y, направленную вверх (начало отсчёта на земле), $-v \le u \le v$; t — искомое время падения первого осколка. Сопротивление воздуха не учитываем, земля горизонтальна.

1. Высота взрыва. В верхней точке скорость гранаты равна нулю. Для подъёма с начальной скоростью v_0 до остановки

$$0 = v_0^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

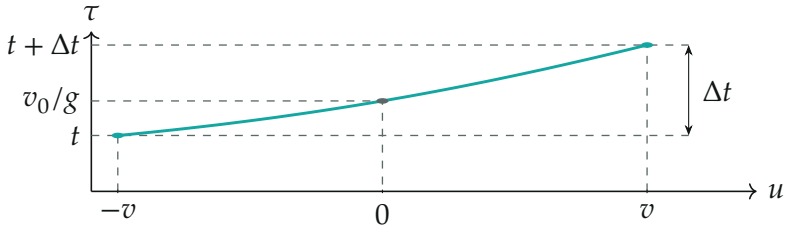
2. Какие осколки падают первыми и последними. Для осколка с вертикальной проекцией скорости u уравнение движения вдоль y:

$$y = h + u\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

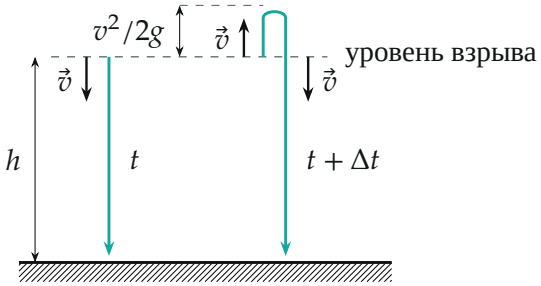
Он падает при $y = 0$, то есть

$$\tau(u) = \frac{u + \sqrt{u^2 + 2gh}}{g}.$$

Эта функция растёт вместе с u: производная $\dfrac{d\tau}{du} = \dfrac{1}{g}\left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + 2gh}}\right) >$ 0, потому что $|u| < \sqrt{u^2 + 2gh}$. Поэтому наименьшее время у осколка с $u = -v$ (вертикально вниз), наибольшее — у осколка с $u = +v$ (вертикально вверх). Горизонтальные составляющие скоростей на время падения не влияют.



Время падения $\tau(u)$ ($v_0 = 20$ м/с, $g = 10$ м/с^2), крайние — при $u = \mp v$

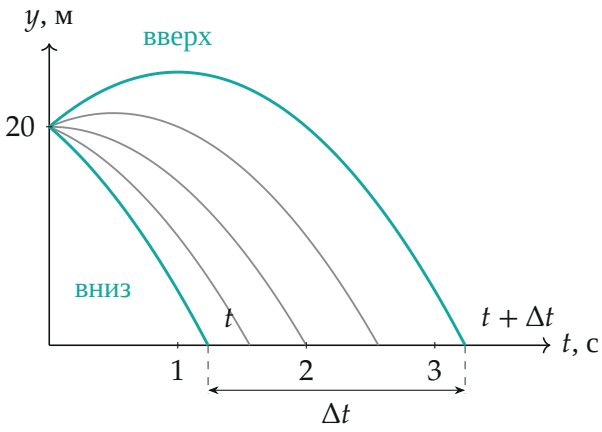


Два крайних осколка: первый летит вниз, последний — вверх и возвращается в точку взрыва со скоростью v, направленной вниз

3. Скорость осколков. Осколок, брошенный вверх со скоростью v, возвращается в точку взрыва через время $2v/g$ (подъём и спуск симметричны) и проходит её вниз с той же по модулю скоростью v. Дальше его движение — точная копия движения осколка, брошенного вниз со скоростью v. Поэтому последний осколок падает позже первого ровно на время $2v/g$:

$$\Delta t = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{2v}{g} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g\,\Delta t}{2}.$$

Тот же результат даёт разность $\tau(v) - \tau(-v)$ по формуле пункта 2: корни $\sqrt{v^2 + 2gh}$ сокращаются, остаётся $2v/g$.



Высота осколков над землёй в зависимости от времени (для наглядности взято $v_0 = 20$ м/с, $g = 10$ м/с^2, $\Delta t = 2$ с): бирюзовые кривые — осколки вниз и вверх, серые — под промежуточными углами. Чем больше начальная проекция скорости вверх, тем позже падение

4. Время падения первого осколка. Для осколка, брошенного вниз со скоростью v, движение равноускоренное: путь h пройден за время t с начальной скоростью v и ускорением g:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2}.$$

Подставим $h = v_0^2/(2g)$ и $v = g\Delta t/2$ и умножим уравнение на $2/g$:

$$t^2 + \Delta t\, t - \frac{v_0^2}{g^2} = 0.$$

Положительный корень этого квадратного уравнения

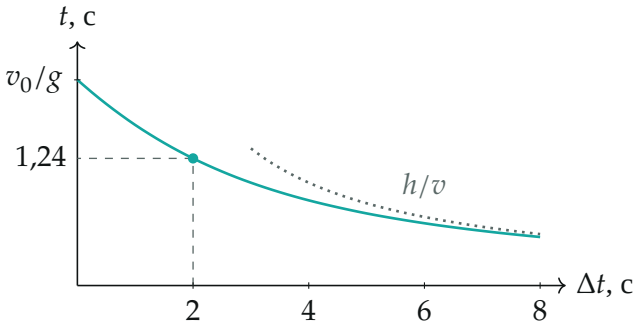
$$t = -\frac{\Delta t}{2} + \sqrt{\frac{\Delta t^2}{4} + \frac{v_0^2}{g^2}}.$$

Второй способ — через энергию. Все осколки падают на землю с одной и той же скоростью V (закон сохранения энергии для осколка: $mV^2/2 = mv^2/2 + mgh$), $V = \sqrt{v^2 + v_0^2}$. Осколок, брошенный вниз, разгоняется от v до V с ускорением g, откуда $t = (V - v)/g$; подстановка $v = g\Delta t/2$ даёт тот же результат.

Обратите внимание: осколки, летящие горизонтально, падают за $v_0/g = \sqrt{2h/g}$ — как тело, брошенное без начальной скорости, но это не самое малое время: осколок, брошенный вниз, упадёт раньше.

Проверка. Размерность: Δt и v_0/g — секунды. Предел $\Delta t \to 0$ (осколки почти без скорости) даёт $t \to v_0/g$: граната падает с высоты h без начальной скорости, $t = \sqrt{2h/g} = v_0/g$. При очень большом Δt (быстрые осколки) $t \approx \dfrac{v_0^2}{g^2\,\Delta t} = \dfrac{h}{v}$: осколок почти равномерно проходит высоту

h со скоростью v. Числа рисунка ($v_0 = 20$ м/с, $g = 10$ м/с^2, $\Delta t = 2$ с): $h = 20$ м, $v = 10$ м/с, $t = \sqrt{4+1} - 1 \approx 1{,}24$ с, последний осколок падает в момент 3,24 с.



Время падения первого осколка в зависимости от Δt при $v_0/g = 2$ с: от v_0/g при $\Delta t = 0$ до h/v при больших Δt (пунктир)

Физический смысл: чем сильнее разбросаны скорости осколков, тем больше разброс времён падения и тем раньше падает самый быстрый осколок; при нулевом разбросе все падают вместе, как с высоты h без начальной скорости.

Ответ. $t = \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{g}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta t}{2}\right)^2} - \dfrac{\Delta t}{2}$.