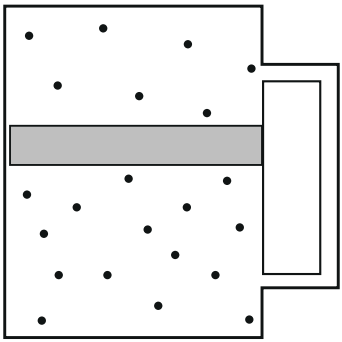
Поршень и перетекание газа

Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 3] Вертикальный цилиндрический сосуд разделен подвижным поршнем массой m и площадью S на два отсека. Под действием силы тяжести поршень медленно опускается. При этом давления газа в сосуде остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием газа по трубке малого объема. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: T в верхнем и $1{,}2T$ в нижнем. Найти давление газа в отсеках.

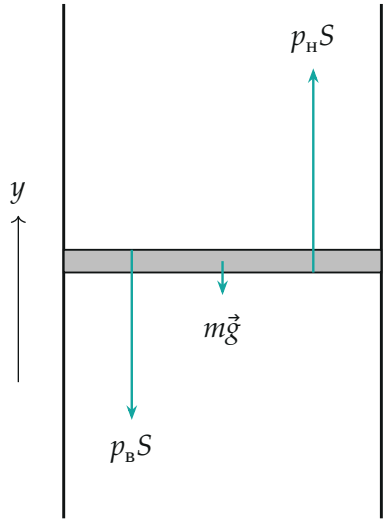


▲ **Решение. Что происходит.** Поршень опускается так медленно, что в каждый момент находится в равновесии: его вес уравновешен разностью сил давления снизу и сверху. Давления в отсеках не меняются, а объём нижнего отсека уменьшается, и газ нижнего отсека по трубке малого объёма уходит в верхний. Главная идея: раз давление и температура каждого отсека постоянны, то постоянна и концентрация молекул в нём ($p = nkT$). Молекулы только переходят из нижнего отсека в верхний, а объёмы меняются на одну и ту же величину — из этого получаем, что концентрации в отсеках одинаковы, и остаётся записать равновесие поршня.

Обозначения. Ось y направлена вверх. $p_в$, $p_н$ — давления в верхнем и нижнем отсеках; $T_в = T$, $T_н = 1{,}2T$; $n_в$, $n_н$ — концентрации молекул; k — постоянная Больцмана. Трением поршня о стенки пренебрегаем, объём трубки мал.

1. Равновесие поршня. Поршень движется медленно, ускорение практически равно нулю. Запишем второй закон Ньютона для поршня в проекции на ось y: давление нижнего газа толкает поршень вверх, давление верхнего газа и сила тяжести — вниз:

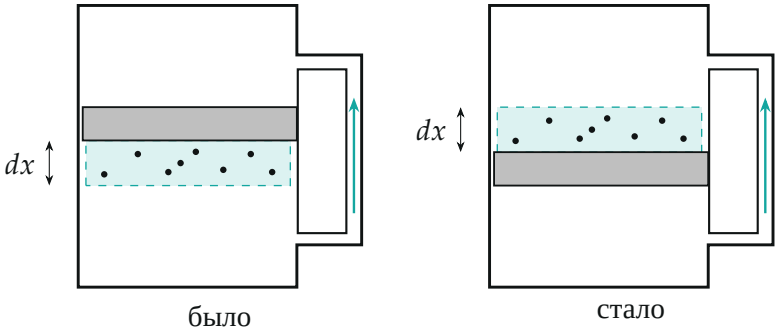
$$p_{\text{н}}S - p_{\text{в}}S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad (p_{\text{н}} - p_{\text{в}})\,S = mg.$$



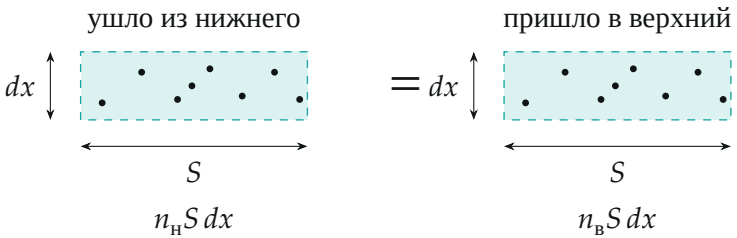
Силы на поршень: сила давления нижнего газа больше силы давления верхнего на вес поршня (6 : 5 : 1 для найденного ответа)

2. Концентрации. Рассмотрим малый промежуток времени, за который поршень опустится на dx. Объём нижнего отсека уменьшится на $S\,dx$, объём верхнего на столько же увеличится. Давление и температура каждого отсека за это время не меняются, значит, не меняется и концентрация. Поэтому из нижнего отсека ушла часть газа в объёме $S\,dx$, то есть $n_{\text{н}}S\,dx$ молекул, а чтобы в добавившемся объёме $S\,dx$ верхнего отсека концентрация осталась прежней, в него пришло $n_{\text{в}}S\,dx$ молекул. Других путей у молекул нет: газ не покидает сосуд, а объём трубки мал, и в ней в любой момент почти нет молекул. Значит, числа молекул равны:

$$n_{\text{н}}S\,dx = n_{\text{в}}S\,dx \quad \Rightarrow \quad n_{\text{н}} = n_{\text{в}} = n.$$



Поршень опустился на dx: слой нижнего газа толщиной dx (слева) перешёл по трубке в слой верхнего газа такой же толщины (справа); справа — стрелка движения газа в трубке, внутри трубки молекул почти нет



Одни и те же молекулы занимают слой объёмом $S\,dx$ сначала внизу, потом наверху: при одинаковом объёме и одинаковом числе молекул концентрации равны

Второй способ — через сохранение вещества. Полное число молей газа в сосуде постоянно: $\nu_н + \nu_в = \text{const}$, где $\nu = pV/(RT)$. Давления и температуры постоянны, объёмы меняются на $\Delta V_н = -\Delta V_в$, поэтому

$$\frac{p_н}{T_н}\Delta V_н + \frac{p_в}{T_в}\Delta V_в = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_н}{T_н} = \frac{p_в}{T_в}.$$

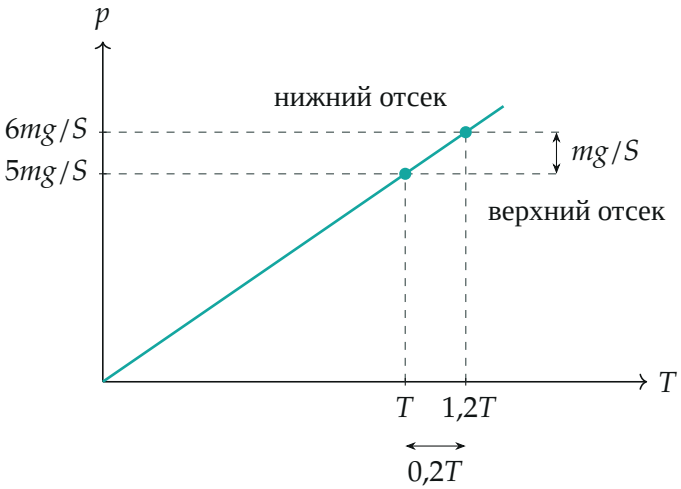
Это то же равенство концентраций: $p/T = nk$.

3. Давления. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории для каждого отсека: $p = nkT_{\text{отсека}}$ с общей концентрацией n. Подставим в уравнение равновесия поршня из пункта 1:

$$nk\,(T_н - T_в)\,S = mg \quad \Rightarrow \quad nk \cdot 0{,}2T \cdot S = mg \quad \Rightarrow \quad nkT = \frac{5mg}{S}.$$

Тогда

$$p_в = nkT = \frac{5mg}{S}, \qquad p_н = nk \cdot 1{,}2T = 1{,}2 \cdot \frac{5mg}{S} = \frac{6mg}{S}.$$



Давления отсеков лежат на одной прямой $p = nkT$ (постоянная концентрация): отрезку между точками отвечает $\Delta p = mg/S$ при $\Delta T = 0{,}2T$

Обратите внимание: давления в отсеках разные, хотя концентрации одинаковы — перепад давлений создают разные температуры. Газ течёт по трубке от большего давления к меньшему, то есть снизу вверх ($p_н > p_в$), и это согласуется с тем, что поршень опускается.

Проверка. Размерность: mg/S — сила на площадь, то есть паскаль. Отношение $p_н/p_в = 6/5 = 1{,}2 = T_н/T_в$, разность $p_н - p_в = mg/S$ — как в уравнении равновесия поршня. Предел: если $T_н \to T_в$, то $n = mg/(kS\,(T_н - T_в)) \to \infty$ и давления бесконечны: при равных температурах и равных концентрациях давления одинаковы, и поршень ничто не держит.

Физический смысл: вес поршня создаёт перепад давлений mg/S, а при одинаковой концентрации перепад давлений возможен только из-за разности температур, и отсюда находится концентрация газа.

Ответ. $p_н = \frac{6mg}{S}$, $p_в = \frac{5mg}{S}$.