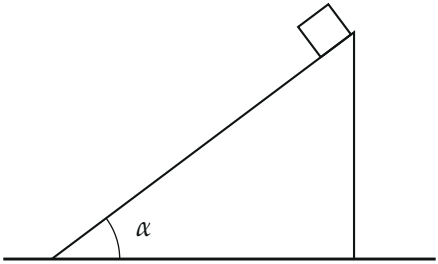
Опрокидывание клина

Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 11 класс, задача 4] На вершину клина, одна грань которого наклонена под углом α, а вторая перпендикулярна горизонтальной поверхности, кладут маленькое тело массой m (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и клином равен k, трение между клином и поверхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли опрокидывание клина? При какой массе M клина?



▲ **Решение. Что происходит.** Тело на наклонной грани либо покоится, либо скользит. Покоящееся тело давит на клин своим весом, вертикально вниз, а скользящее — ещё и силой трения, и тогда давление на клин получает горизонтальную составляющую, направленную к вертикальной грани. Только она способна опрокинуть клин, причём вокруг вершины прямого угла: вес самого клина этому мешает.

Обозначения. B — вершина прямого угла клина (на столе), C — его верхняя вершина, a — длина основания (нижней грани), $h = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — высота вертикальной грани. Тело кладут у самой вершины C и размерами тела пренебрегаем: силы от тела приложены в C. Клин однородный (иначе положение центра масс неизвестно): его центр масс — точка пересечения медиан прямоугольного треугольника, на расстоянии $a/3$ от вертикальной грани. Ось x направим вдоль наклонной грани вниз, ось y — по нормали к ней от клина.

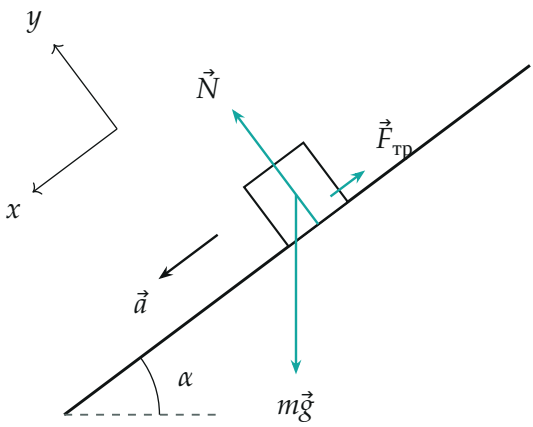
Пункт 1. Тело на наклонной грани.

1. Силы на тело. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$ (по нормали к грани) и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вдоль грани). Тело

не отрывается от грани и не проваливается в неё, поэтому в проекции на ось y второй закон Ньютона даёт

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

Обратите внимание: $N = mg\cos\alpha$ верно и для покоя, и для скольжения: ускорение тела лежит вдоль грани.



Тело скользит вниз по грани: силы на тело m, оси вдоль грани и по нормали (для рисунка $k = 0{,}3$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$)

2. Покой или скольжение. Пусть тело неподвижно. Тогда в проекции на ось x сила трения покоя уравновешивает составляющую тяжести: $F_{тр} = mg\sin\alpha$, а трение покоя не превосходит $kN = kmg\cos\alpha$. Условие покоя

$$mg\sin\alpha \le k\,mg\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad k \ge \operatorname{tg}\alpha.$$

Коэффициент трения в условии один, считаем его одинаковым для покоя и скольжения. При $k < \operatorname{tg}\alpha$ тело скользит с ускорением $a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) > 0$, и сила трения скольжения равна $F_{тр} = kN = k\,mg\cos\alpha$, направлена вдоль грани вверх.

Пункт 2. Покоящееся тело: $k \ge \operatorname{tg}\alpha$. Сумма сил $\vec{N} + \vec{F}_{тр}$, действующих на покоящееся тело со стороны клина, уравновешивает $m\vec{g}$, то есть равна mg и направлена вертикально вверх. По третьему закону Ньютона на клин со стороны тела действует сила mg, направленная вертикально

вниз. Её линия действия проходит через C вдоль вертикальной грани и через B: момент относительно B равен нулю, а тяжесть клина создаёт момент в обратную сторону. Значит, *клин не опрокидывается*.

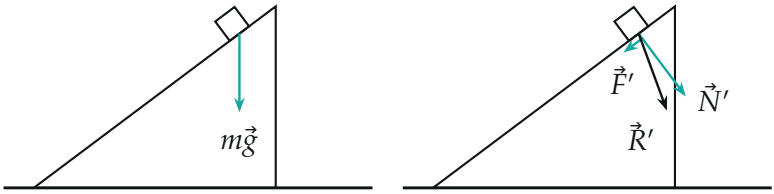
Пункт 3. Скользящее тело: $k < \operatorname{tg}\alpha$.

3. Силы на клин. По третьему закону Ньютона клин действует на тело силами $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$, а тело на клин — силами $\vec{N}' = -\vec{N}$ (по нормали внутрь клина, $N' = mg\cos\alpha$) и $\vec{F}' = -\vec{F}_{\text{тр}}$ (вдоль грани вниз, $F' = k\,mg\cos\alpha$), обе приложены в C. Разложим их на горизонтальную составляющую (вправо, к вертикальной грани) и вертикальную (вниз):

$$F_x = N'\sin\alpha - F'\cos\alpha = mg\cos\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha) > 0,$$

$$F_y = -(N'\cos\alpha + F'\sin\alpha) = -mg\cos\alpha\,(\cos\alpha + k\sin\alpha).$$

Горизонтальная составляющая положительна как раз при $k < \operatorname{tg}\alpha$: при покое её нет, и клин опрокинуться не мог. Вертикальная составляющая по модулю меньше mg: $\cos\alpha(\cos\alpha + k\sin\alpha) < 1$ при $k < \operatorname{tg}\alpha$.



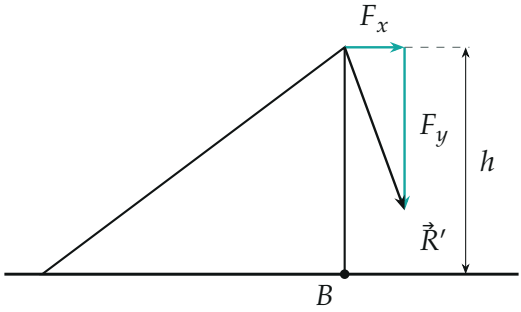
(а) $k \geq \operatorname{tg}\alpha$: тело покоится (б) $k < \operatorname{tg}\alpha$: тело скользит

Сила, с которой тело действует на клин: при покое она вертикальна (а), при скольжении равнодействующая $\vec{R}' = \vec{N}' + \vec{F}'$ наклонена к вертикальной грани (б; $k = 0{,}3$)

4. Когда клин может повернуться. Опрокидывание — поворот клина вокруг B по часовой стрелке (на рисунке вершина C уходит вправо). В момент начала поворота левая часть основания уже не давит на стол, и сила нормальной реакции стола приложена в B; горизонтальная сила трения стола лежит на линии стола. Обе силы не создают момента относительно B, поэтому для порога достаточно моментов силы от тела и тяжести клина $M\vec{g}$, приложенной в центре масс клина.

5. Момент силы от тела. Найдём его относительно B по составляющим. Вертикальная составляющая F_y действует вдоль вертикальной линии через C и B: плечо равно нулю. Горизонтальная составляющая F_x действует на высоте $h = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ над столом: плечо равно h, момент направлен по часовой стрелке:

$$M_1 = F_x h = mg\cos\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot a\,\mathrm{tg}\,\alpha = mga\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

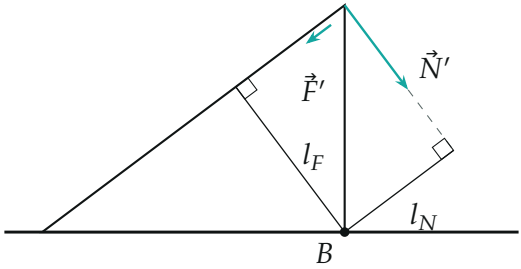


Равнодействующая силы от тела, составляющие F_x и F_y; линия действия F_y — вертикальная грань, проходящая через B, поэтому момент даёт только F_x с плечом h

Тот же момент другим способом — по двум силам с плечами. Линия действия $\vec{N}'$ образует с вертикалью угол α, поэтому её плечо относительно B равно $l_N = h\sin\alpha = a\sin^2\alpha/\cos\alpha$. Линия действия $\vec{F}'$ — сама наклонная грань, расстояние от B до неё $l_F = a\sin\alpha$ (из прямоугольного треугольника с гипотенузой a). Момент N' вращает клин по часовой стрелке, момент F' — против:

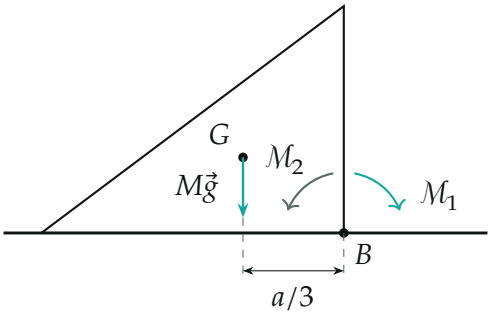
$$M_1 = N' l_N - F' l_F = mg\cos\alpha\cdot\frac{a\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - k\,mg\cos\alpha\cdot a\sin\alpha$$
$$= mga\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha),$$

результат тот же.



Плечи сил $\vec{N}'$ и $\vec{F}'$ относительно B (силы приложены в C; $k = 0{,}3$): $l_N = a\sin^2\alpha/\cos\alpha$, $l_F = a\sin\alpha$

6. Момент тяжести клина. Момент $Mg \cdot a/3$ вращает клин против часовой стрелки: линия действия тяжести проходит на расстоянии $a/3$ от B (центр масс однородного прямоугольного треугольника лежит на трети основания от вертикальной грани).



Центр масс клина G на расстоянии $a/3$ от вертикальной грани; момент M_1 силы от тела вращает клин по часовой стрелке (опрокидывание), момент $M_2 = Mg\,a/3$ тяжести клина — против

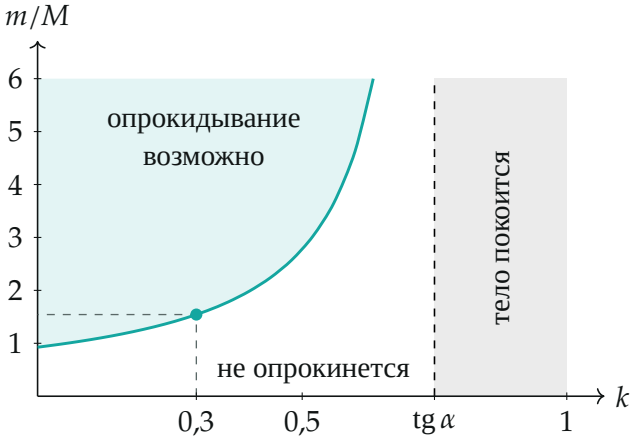
7. Условие опрокидывания. Клин переворачивается, если момент от тела не меньше момента тяжести, $M_1 \geq M_2$:

$$mga\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha) \geq \frac{Mga}{3} \quad \Rightarrow \quad M \leq 3m\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha),$$

или, что то же, $m \geq \dfrac{M}{3\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha)}$. Ширина основания a и ускорение свободного падения сократились.

Обратите внимание: условие содержит $\sin\alpha - k\cos\alpha$ в знаменателе и по смыслу требует его положительности, то есть $k < \operatorname{tg}\alpha$ — то же условие скольжения, что и в пункте 2. Опрокидывание возможно только при скольжении тела, но одного скольжения мало: нужна ещё достаточно лёгкая масса M клина.

Обратите внимание: самый опасный момент — когда тело находится у вершины. Сдвинем точку приложения силы от тела на s вниз вдоль грани: сама сила не меняется, а её момент по часовой стрелке уменьшается на $s\,(|F_y|\cos\alpha + F_x\sin\alpha) = N's = mg\cos\alpha\, s$. Поэтому, если клин не опрокинулся сразу, по мере сползания тела он опрокинуться уже не может.



Наименьшее отношение m/M, при котором клин опрокидывается, в зависимости от коэффициента трения k ($\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$): бирюзовая область — опрокидывание, справа от $\operatorname{tg}\alpha$ тело не скользит; точка $k = 0{,}3$ даёт $m/M \approx 1{,}54$

Проверка. Размерность: $M \le 3m\sin\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)$ — масса. Предел $k \to \operatorname{tg}\alpha$: скобка стремится к нулю и $M \to 0$ — опрокинуть клин любой ненулевой массы нельзя, как и в пункте 2. Предел $m \to \infty$: условие выполняется для любого клина при $k < \operatorname{tg}\alpha$. Для $k = 0$ (нет трения) $M \le 3m\sin^2\alpha$. Числа рисунка ($\sin\alpha = 0{,}6$, $k = 0{,}3$): $M \le 3m \cdot 0{,}6\,(0{,}6 - 0{,}24) = 0{,}648\,m$, то есть $m/M \ge 1{,}54$ — совпадает с точкой на графике.

Физический смысл: клин опрокидывает горизонтальная составляющая давления скользящего тела, приложенная на высоте h; её момент должен превзойти момент тяжести клина, и это возможно, пока тело скользит.

Ответ. При $k \geq \operatorname{tg}\alpha$ (тело покоится) опрокидывание невозможно. При $k < \operatorname{tg}\alpha$ оно возможно, если $M \leq 3m \sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha)$, то есть при

$$m \geq \frac{M}{3\sin\alpha\,(\sin\alpha - k\cos\alpha)}.$$