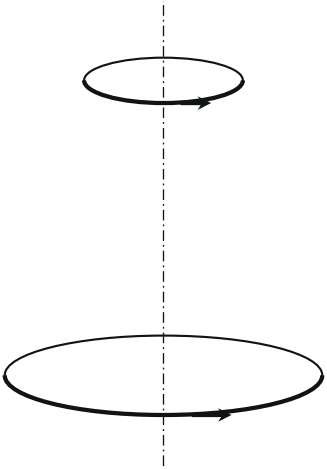
Сила взаимодействия колец с током

Задача 5.

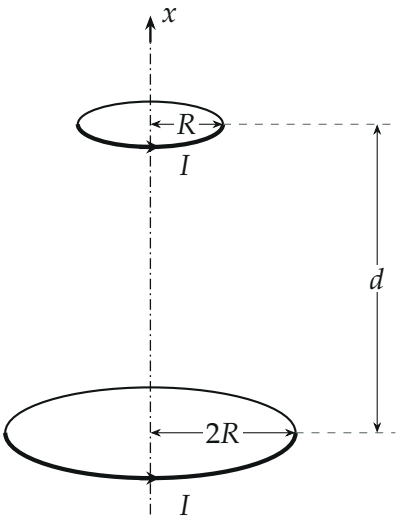
istochnikРосатом 2017/18, 11 класс, задача 5 Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



▲ **Решение. Что происходит.** Большое кольцо создаёт магнитное поле. Рядом с его осью поле направлено почти вдоль оси, но линии поля слегка расходятся, поэтому у малого кольца есть и небольшая составляющая, перпендикулярная оси. Именно она, а не главная составляющая вдоль оси, и создаёт силу, тянущую малое кольцо вдоль оси. Задача сводится к трём шагам: выразить силу через эту поперечную составляющую, найти её по теореме Гаусса для магнитного поля (поток через замкнутую поверхность равен нулю), зная поле большого кольца на оси, и подставить $d \gg R$.

Обозначения. x — расстояние вдоль оси от плоскости большого кольца; $B(x)$ — индукция поля большого кольца на оси; $B_\perp$ — составляющая поля большого кольца, перпендикулярная оси, на расстоянии R от оси

(где проходит малое кольцо); $B_{\parallel}$ — составляющая вдоль оси. Так как $R \ll d$, в пределах малого кольца поле меняется мало.



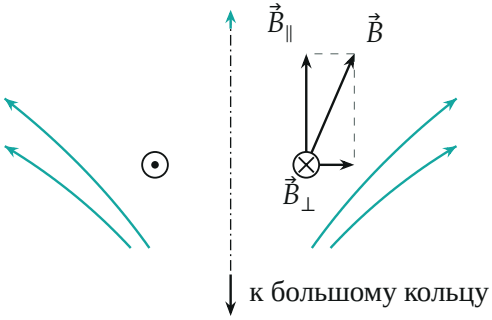
Поясняющий рисунок: кольца радиусов R и $2R$ на расстоянии d, ось x — ось колец

1. Какая сила действует на малое кольцо. Разложим поле большого кольца в точках малого на $\vec{B}_{\parallel}$ (вдоль оси) и $\vec{B}_{\perp}$ (от оси; по симметрии $B_{\perp}$ и $B_{\parallel}$ одинаковы во всех точках малого кольца). Сила Ампера на элемент $d\vec{l}$ малого кольца — $d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$.

Составляющая $\vec{B}_{\parallel}$ даёт силу в плоскости кольца, направленную по радиусу, а на противоположных элементах эти силы противоположны — в сумме нуль: кольцо только слегка сжимается или растягивается. Составляющая $\vec{B}_{\perp}$ перпендикулярна и оси, и элементу $d\vec{l}$ (он касается кольца), поэтому сила от неё $dF = I\, B_{\perp}\, dl$ направлена вдоль оси и одинакова для всех элементов. Складываем по всей длине кольца $2\pi R$:

$$F = 2\pi R\, I\, B_{\perp}. \qquad (1)$$

Обратите внимание: на самой оси $B_{\perp} = 0$ по симметрии, поэтому найти $B_{\perp}$ просто подстановкой в формулу поля на оси нельзя — нужен обходной путь через теорему Гаусса.



Осевое сечение: линии поля большого кольца расходятся; в точке малого кольца поле раскладывается на $\vec{B}_\parallel$ и $\vec{B}_\perp$ (рисунок не в масштабе: $d/R = 4$ для наглядности)

2. Поле большого кольца на оси. Для кольца радиуса $2R$ с током I на оси на расстоянии x от его плоскости известна формула (она получается суммированием вкладов элементов кольца по закону Био — Савара):

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I\,(2R)^2}{\left((2R)^2 + x^2\right)^{3/2}}. \qquad (2)$$

Поле убывает с ростом x: график показан ниже.

3. Поперечная составляющая — по теореме Гаусса. Магнитных зарядов нет, поэтому поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Возьмём вспомогательную поверхность — маленький цилиндр, соосный с кольцами, радиуса R и высоты Δx, нижнее основание которого находится на расстоянии x от плоскости большого кольца. Выберем наружные нормали и найдём потоки:

- через нижнее основание: $-B(x)\,\pi R^2$ (поле входит в цилиндр; из-за малости R в пределах основания поле почти такое же, как на оси);
- через верхнее основание: $+B(x+\Delta x)\,\pi R^2$;
- через боковую поверхность: $+B_\perp \cdot 2\pi R\,\Delta x$ (поле выходит наружу).

Сумма потоков равна нулю:

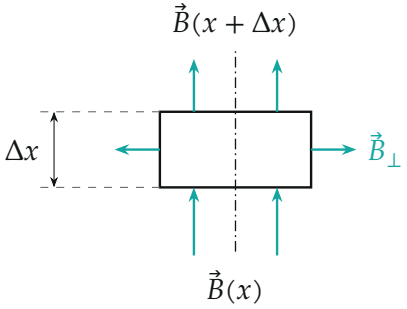
$$-B(x)\,\pi R^2 + B(x+\Delta x)\,\pi R^2 + B_\perp \cdot 2\pi R\,\Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_\perp = -\frac{R}{2}\cdot\frac{B(x+\Delta x)-B(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ дробь превращается в производную:

$$B_\perp = -\frac{R}{2}\frac{dB}{dx}. \tag{3}$$

Поле убывает ($dB/dx < 0$), поэтому $B_\perp > 0$ — поле действительно направлено от оси, как на рисунке.



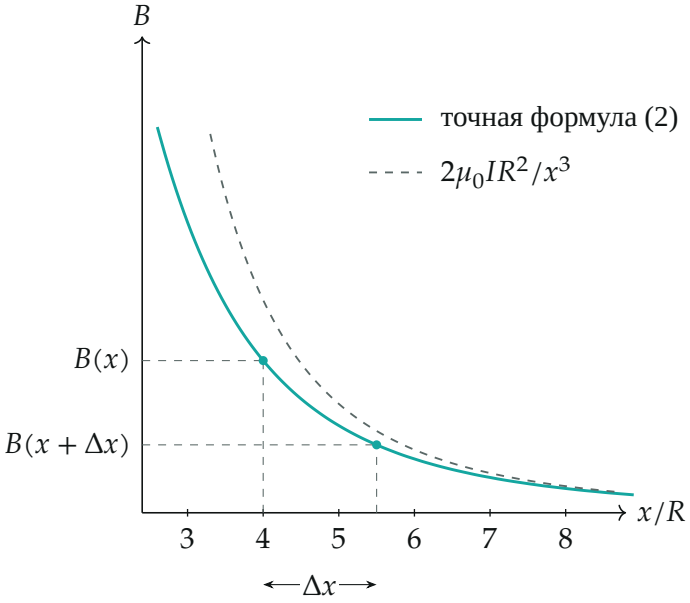
Вспомогательный цилиндр: поток $B(x)\pi R^2$ входит снизу, $B(x+\Delta x)\pi R^2$ выходит сверху, остальное — через боковую поверхность

4. Производная. Для $x = d \gg R$ в формуле (2) можно пренебречь $(2R)^2$ по сравнению с x^2:

$$B(x) \approx \frac{\mu_0}{2}\frac{4R^2 I}{x^3} = \frac{2\mu_0 I R^2}{x^3}, \qquad \frac{dB}{dx} = -\frac{6\mu_0 I R^2}{x^4}.$$

(Точное дифференцирование (2) даёт $-\dfrac{3\mu_0 I\,(2R)^2\,x}{2\left((2R)^2+x^2\right)^{5/2}}$, при $x \gg R$ то же самое.) По формуле (3)

$$B_\perp = -\frac{R}{2}\left(-\frac{6\mu_0 I R^2}{d^4}\right) = \frac{3\mu_0 I R^3}{d^4}.$$

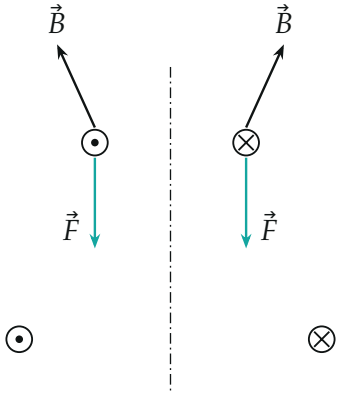


Поле большого кольца на оси: точная формула (2) и приближение $2\mu_0 IR^2/x^3$ при $x \gg R$; вычислено в единицах $\mu_0 I/R$

5. Сила. Подставим $B_\perp$ в формулу (1):

$$F = 2\pi R\, I \cdot \frac{3\mu_0 IR^3}{d^4} = 6\pi\mu_0 \frac{I^2R^4}{d^4}.$$

Направление: токи текут в одну сторону, а параллельные токи одного направления притягиваются, так что и кольца притягиваются. Это видно и по рисунку: сила от $\vec{B}_\perp$ на каждом элементе малого кольца направлена к большому кольцу. По третьему закону Ньютона точно такая же сила действует на большое кольцо.



Осевое сечение: токи малого и большого колец направлены одинаково (справа ток от нас, слева — к нам), силы $\vec{F}$ на малое кольцо направлены к большому

Второй способ: через магнитные моменты. Кольцо с током — магнитный диполь с моментом $p = I \cdot$ (площадь): $p_1 = \pi R^2 I$ у малого, $p_2 = \pi(2R)^2 I = 4\pi R^2 I$ у большого. На оси диполя (большого кольца) поле равно $B = \dfrac{\mu_0 p_2}{2\pi x^3} = \dfrac{2\mu_0 I R^2}{x^3}$ — то же, что получилось выше. Энергия малого диполя, направленного вдоль поля, $W = -p_1 B(x)$, а сила вдоль оси $F_x = -\dfrac{dW}{dx} = p_1 \dfrac{dB}{dx} = \pi R^2 I \cdot \left(-\dfrac{6\mu_0 I R^2}{x^4}\right) = -6\pi\mu_0 \dfrac{I^2 R^4}{x^4}$. Знак минус: сила направлена к меньшим x, к большому кольцу, а по модулю — то же.

Проверка. Размерность: $\mu_0 I^2$ — это сила (поэтому $\mu_0 I^2 R^4/d^4$ измеряется в ньютонах, дробь безразмерна). Предел: при $d \to \infty$ сила стремится к нулю быстро, как d^{-4} — так убывает взаимодействие диполей. Численная проверка: по формуле Неймана для взаимной индукции двух коаксиальных колец, $F = I^2\, dM/dx$, при $d = 100R$ получено $F = 0{,}9988 \cdot 6\pi\mu_0 I^2 R^4/d^4$, а при $d = 30R$ — на 1,4% меньше (поправки порядка $(R/d)^2$).

Физический смысл. Два витка с током ведут себя как два маленьких магнита, направленных вдоль оси одинаково: они притягиваются, и сила быстро падает с расстоянием.

Ответ. $F = 6\pi\mu_0 \dfrac{I^2 R^4}{d^4}$ (кольца притягиваются).