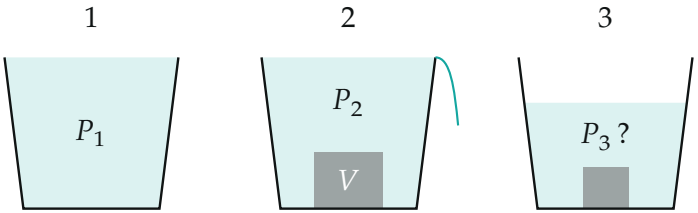
Ведерко с камнем

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 7 класс, задача 1] Вес ведерка, до краев заполненного водой, равен $P_1 = 20$ Н. В ведерко кладут камень, плотность которого втрое больше плотности воды и который полностью погружается в воду. Вес ведерка становится равным $P_2 = 24$ Н. Каким будет вес ведерка, если из него аккуратно вытащить первый камень, а положить другой камень, с той же плотностью, но с вдвое меньшим объемом, чем у первого.



Поясняющий рисунок: 1 — ведро, полное воды; 2 — с камнем объёма V, часть воды вылилась; 3 — с камнем объёма $V/2$

▲ **Решение. Что происходит.** Ведро полно до краёв, поэтому камень, опущенный в него, выталкивает через край воду своего объёма. Вес ведра меняется на разность: прибавился вес камня, убавился вес вылившейся воды. По этому изменению находим вес воды в объёме камня. Во втором опыте камень меньше, а воды уже не хватает до краёв: на месте вынутого камня остаётся пустота. Ключевое — аккуратный подсчёт, что в ведре прибавилось и что убыло.

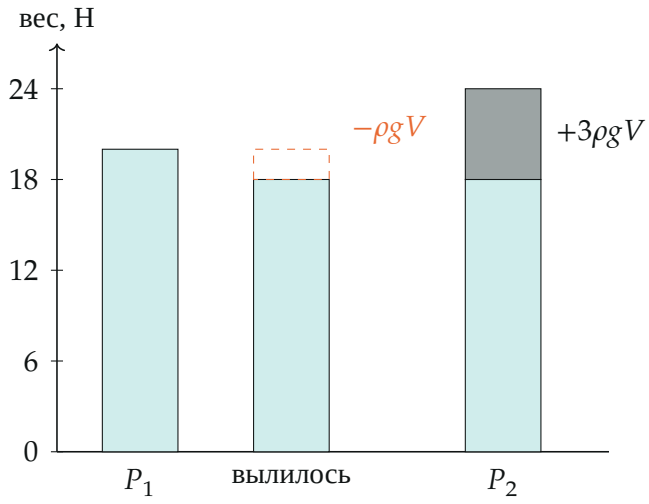
Обозначения. V — объём первого камня; ρ — плотность воды, 3ρ — плотность камня; $P_0 = \rho g V$ — вес воды в объёме первого камня.

1. Опускаем первый камень. Камень погрузился полностью и вытеснил объём воды V, который вылился через край. Вес ведра прибавил вес камня $3\rho g V$ и потерял вес воды $\rho g V$:

$$P_2 = P_1 + 3\rho g V - \rho g V = P_1 + 2P_0,$$

$$P_0 = \frac{P_2 - P_1}{2} = \frac{24 - 20}{2}\ \text{Н} = 2\ \text{Н}.$$

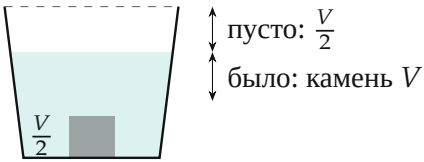
Вес самого камня $3P_0 = 6$ Н.



Учёт веса в опыте 2: убыла вода объёма V (вес P_0), прибыл камень (вес $3P_0$); итог $+2P_0 = 4$ Н

2. Меняем камень. Вынем первый камень: в ведре остаётся вода, вес $P_1 - P_0$, и пустой объём V у краёв. Положим камень объёма $V/2$: он занимает половину пустоты, вода через край не льётся. Вес ведра

$$P_3 = (P_1 - P_0) + 3\rho g\,\frac{V}{2} = P_1 - P_0 + \frac{3}{2}P_0 = P_1 + \frac{P_0}{2}.$$

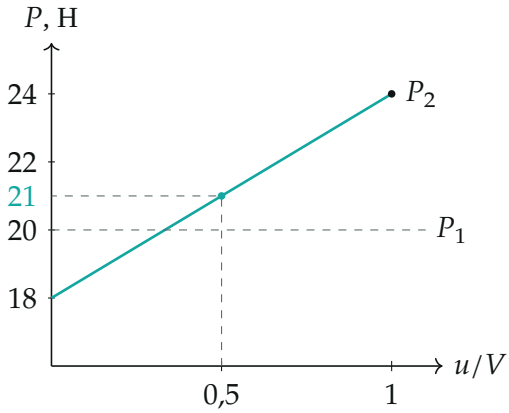


Опыт 3: после замены камня до краёв не хватает объёма $V/2$; вода не выливается

Получаем

$$P_3 = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{4} = \frac{3P_1 + P_2}{4} = \frac{3 \cdot 20 + 24}{4}\ \text{Н} = 21\ \text{Н}.$$

Обратите внимание: во втором случае вода *не выливается* — её уже меньше на объём первого камня. Ошибка — считать по образцу первого опыта «прибавили камень, убавили воду его объёма»: это дало бы $P_1 + P_0 = 22$ Н.



Вес ведра после замены камня на камень объёма u: $P = P_1 - P_0 + 3P_0\,u/V$; при $u = V$ — снова P_2, при $u = V/2$ — 21 Н

Проверка. Размерность: все слагаемые — веса, в ньютонах. Частные случаи: положим обратно тот же камень ($u = V$) — формула $P_1 - P_0 + 3P_0$ даёт $P_2 = 24$ Н, как и должно быть; не положим ничего ($u = 0$) — $P_1 - P_0 = 18$ Н, ведро без воды объёма V. Второй способ: вес ведра — вес полного ведра P_1, плюс то, чем камень $V/2$ тяжелее воды того же объёма ($2\rho g \cdot \frac{V}{2} = P_0 = 2$ Н), минус вес воды, которой нет в пустоте $V/2$ ($\frac{1}{2}P_0 = 1$ Н): $20 + 2 - 1 = 21$ Н.

Смысл: ответ определяется только тем, что сейчас лежит в ведре; полезно сравнивать с полным ведром, заменяя объёмы воды на камень или на пустоту.

Ответ. $P_3 = \dfrac{3P_1 + P_2}{4} = 21$ Н.