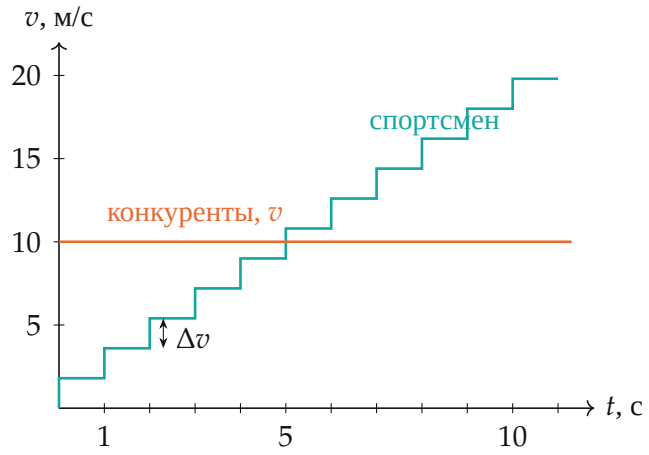
Спортсмен с допингом

Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 7 класс, задача 4] Нечестный спортсмен при подготовке к Олимпийским играм принимал допинг, который позволял достигать очень высокой скорости, но при медленном разгоне. В результате спортсмен бежал дистанцию $l = 100$ м по следующему графику: в начале каждой следующей секунды он мгновенно увеличивал свою скорость на величину $\Delta v = 1{,}8$ м/с (до начала первой секунды его скорость была нулевой). На какое время обгонит или отстанет этот спортсмен от своих конкурентов, которые бегут с постоянной скоростью $v = 10$ м/с?



Поясняющий рисунок: скорость спортсмена — «лесенка» со ступенькой Δv каждую секунду, у конкурентов — постоянная

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость спортсмена растёт скачками: в течение первой секунды он бежит со скоростью Δv, второй — $2\Delta v$, и так далее; внутри каждой секунды движение равномерное. Путь за каждую секунду — площадь ступеньки на графике $v(t)$, весь путь — сумма площадей. Сначала спортсмен сильно отстаёт, к концу его скорость почти вдвое больше, чем у конкурентов; вопрос — успеет ли он догнать их к финишу. Сравним время на стометровку.

Обозначения. $\Delta t = 1$ с — длительность ступеньки; t_0 — время конкурентов; t — время спортсмена; s_n — его путь за n полных секунд.

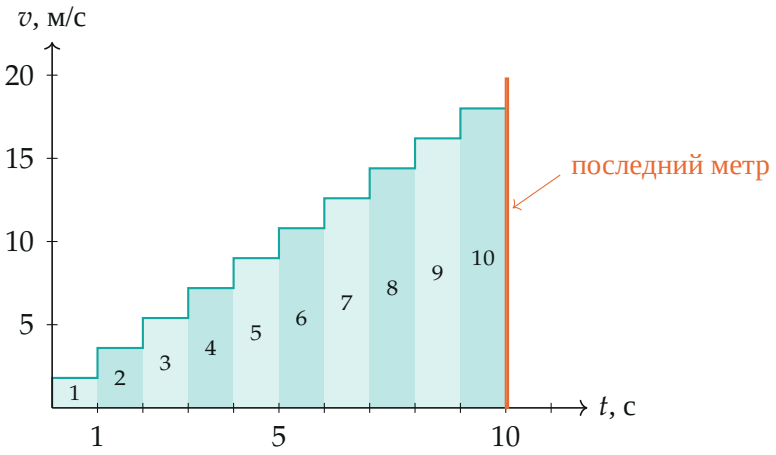
1. Время конкурентов. Они бегут равномерно:

$$t_0 = \frac{l}{v} = \frac{100}{10}\ \text{с} = 10\ \text{с}.$$

2. Путь спортсмена за n секунд. В течение k-й секунды скорость равна $k\Delta v$, путь за эту секунду $k\Delta v\,\Delta t$. За n секунд

$$s_n = \Delta v\,\Delta t\,(1 + 2 + \ldots + n) = \Delta v\,\Delta t\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Сумму $1+2+\ldots+n$ удобно сложить парами с концов: $1+n = 2+(n-1) = \ldots$, пар $n/2$. За $n = 10$ секунд $s_{10} = 55\,\Delta v\,\Delta t = 55 \cdot 1{,}8$ м $= 99$ м — на метр меньше дистанции.

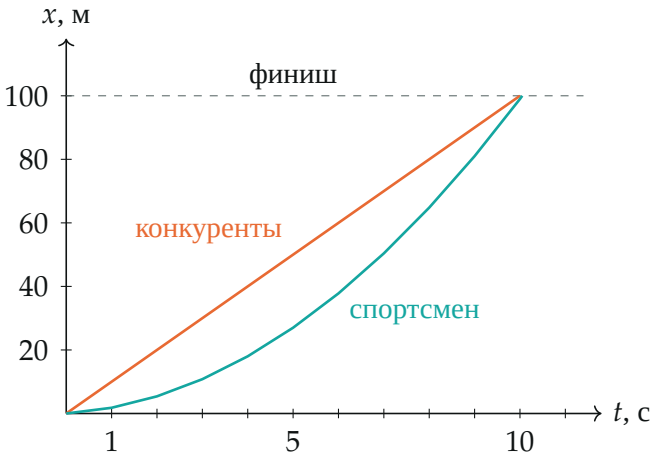


Путь — площадь под графиком $v(t)$: столбики $1, 2, \ldots, 10$ в единицах $\Delta v\,\Delta t = 1{,}8$ м, всего $55 \cdot 1{,}8 = 99$ м

3. Последний метр. В начале 11-й секунды скорость стала $11\Delta v = 19{,}8$ м/с, и оставшийся 1 м спортсмен пробегает равномерно за

$$\tau = \frac{l - s_{10}}{11\Delta v} = \frac{1\ \text{м}}{19{,}8\ \text{м/с}} \approx 0{,}0505\ \text{с}.$$

Его время $t = 10\text{ с} + \tau \approx 10{,}05\text{ с}$. Применимость: $\tau < 1$ с, то есть финиш действительно внутри 11-й секунды, до следующего скачка скорости.

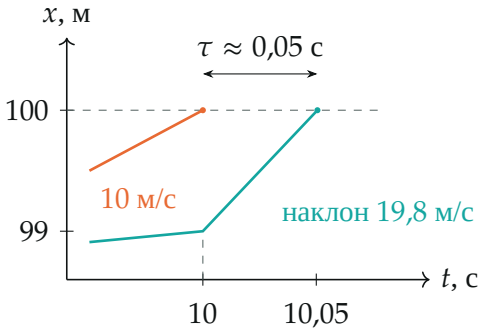


Координата от времени: ломаная спортсмена (наклон растёт каждую секунду) и прямая конкурентов; до финиша ломаная всё время ниже

4. Сравнение. Спортсмен финиширует позже на

$$\Delta t_{\text{отст}} = t - t_0 = \tau = \frac{l - s_{10}}{11\Delta v} \approx 0{,}05\text{ с}.$$

Он отстанет: за первые 10 с он пробежал 99 м против 100 м у конкурентов.



Окрестность финиша крупно: последний метр спортсмен пробегает за 0,05 *с*

Обратите внимание: на последнем метре спортсмен бежит почти вдвое быстрее конкурентов, но отставание по *времени* определяется отставанием по пути к моменту t_0 (1 м), делённым на *его* скорость $11\Delta v$, а не на скорость конкурентов.

Проверка. Размерность: м / (м/с) — секунды. Второй способ: найдём, сколько секунд n нужно спортсмену, чтобы набрать 100 м: $1{,}8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \geq 100$, $n(n+1) \geq 111{,}1$; при $n = 10$ — 110 (не хватает), при $n = 11$ — 132; значит, финиш внутри 11-й секунды, как мы и считали. Средняя скорость спортсмена $100/10{,}05 \approx 9{,}95$ м/с — чуть меньше 10 м/с, отсюда и малое отставание.

Смысл: «лесенка» скорости с шагом Δv к целым секундам даёт почти тот же путь, что равноускоренный разгон с ускорением $\Delta v/\Delta t$, начатый на полсекунды раньше: $s_n = \frac{\Delta v}{2\Delta t}\left((n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right)\Delta t^2$. Даже этой форы не хватает: к 10 с набирается только 99 м.

Ответ. Отстанет на $\tau = \dfrac{l - 55\,\Delta v\,\Delta t}{11\,\Delta v} \approx 0{,}05$ с ($\Delta t = 1$ с).