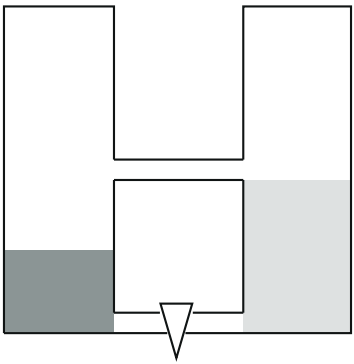
Сосуды с двумя жидкостями

Задача 5. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 7 класс, задача 5] Два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в самом низу тонкой трубкой, перекрытой краном. Вторая узкая трубка соединяет сосуды на высоте h. В сосуды налита – жидкость плотности ρ в одно колено, и жидкость плотности 6ρ в другое, причем высота слоя жидкости с плотностью ρ равна h, плотности $6\rho - h/2$. Кран открывают. Найти высоту столба легкой жидкости в том сосуде, где первоначально была только тяжелая жидкость.



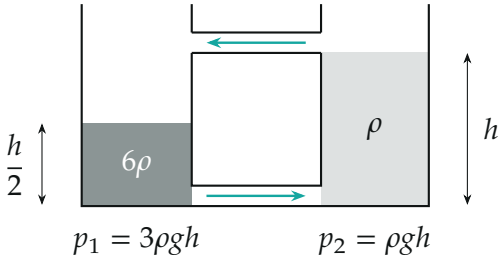
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сообщающиеся сосуды с разными жидкостями. Пока кран закрыт, каждая жидкость стоит в своём сосуде. Откроем кран — нижняя трубка соединит донья, и жидкость потечёт туда, где давление у дна меньше. Тяжёлая жидкость из-под большего давления пойдёт по нижней трубке во второй сосуд, вытесняя оттуда лёгкую вверх; лёгкая уже стоит вровень с верхней трубкой и будет переливаться по ней в первый сосуд. Процесс остановится, когда давления у дна сравняются. Ключевой закон — давление столба жидкости $p = \rho g h$ (атмосферное давление над обоими сосудами одинаково и сокращается).

Обозначения. Сосуд 1 — где была тяжёлая жидкость (слева на рисунке), сосуд 2 — где была лёгкая. x — высота слоя тяжёлой жидкости, перетёкшей в сосуд 2; p_1, p_2 — давления жидкости у дна сосудов (без атмосферного).

1. Куда потечёт. До открытия крана давления у дна

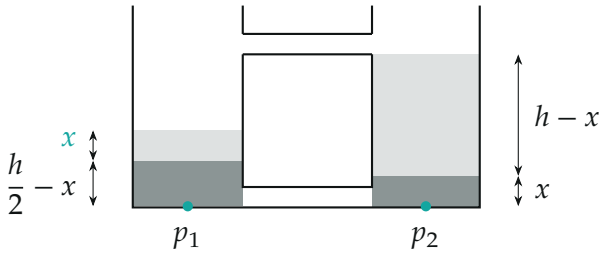
$$p_1 = 6\rho g \cdot \frac{h}{2} = 3\rho g h, \qquad p_2 = \rho g h.$$

$p_1 > p_2$, поэтому тяжёлая жидкость пойдёт по нижней трубке из сосуда 1 в сосуд 2.



Сразу после открытия крана: $p_1 > p_2$, тяжёлая жидкость течёт вправо по нижней трубке, лёгкая — влево по верхней

2. Сколько перетечёт по верхней трубке. Сосуды одинаковы. Слой тяжёлой жидкости высоты x, пришедший в сосуд 2, поднимает лёгкую жидкость на x выше верхней трубки — и ровно этот избыток, тоже слой высоты x, переливается в сосуд 1. В конце в сосуде 1: тяжёлая жидкость $\frac{h}{2} - x$ и сверху лёгкая x; в сосуде 2: тяжёлая x и сверху лёгкая $h - x$ (уровень там остаётся на высоте h). Значит, высота лёгкой жидкости в сосуде 1 — это и есть x.



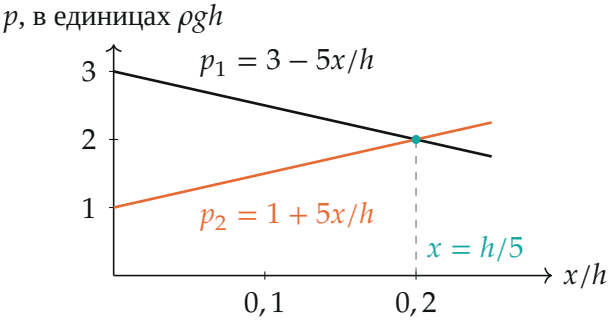
Конечное состояние (в масштабе, $x = h/5$): тёмное — жидкость 6ρ, светлое — ρ; у дна давления равны

3. Условие равновесия. Жидкость в нижней трубке покоится, если давления у дна сосудов равны (верхняя трубка над жидкостью сосуда 1, давление воздуха там одинаковое). Давление у дна — сумма давлений слоёв:

$$p_1 = 6\rho g\Big(\frac{h}{2} - x\Big) + \rho g x, \qquad p_2 = 6\rho g x + \rho g(h - x).$$

Приравняем и сократим ρg:

$$3h - 6x + x = 6x + h - x \quad \Rightarrow \quad 2h = 10x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{5}.$$



Давления у дна от перетёкшего слоя: p_1 убывает, p_2 растёт, перетекание остановится при $x = h/5$

Обратите внимание: с каждым шагом перетекания давление у дна сосуда 1 падает сразу по двум причинам — уходит тяжёлая жидкость ($-6\rho g x$) и приходит лёгкая ($+\rho g x$); у сосуда 2 наоборот. Поэтому разность давлений убывает со скоростью $10\rho g$ на единицу x, а не $6\rho g$.

Проверка. Размерность: x — длина. Числа: при $x = h/5$ давления у дна $6\rho g \cdot 0{,}3h + \rho g \cdot 0{,}2h = 2\rho g h$ и $6\rho g \cdot 0{,}2h + \rho g \cdot 0{,}8h = 2\rho g h$ — равны. Ограничения выполнены: тяжёлой жидкости в сосуде 1 осталось $0{,}3h > 0$, лёгкая в сосуде 2 по-прежнему не ниже верхней трубки. Второй способ: среднее давление у донышек сохраняется, так как жидкости только переставляются, $\frac{1}{2}(3+1)\rho g h = 2\rho g h$, и давление сосуда 1 упало с $3\rho g h$ до $2\rho g h$, то есть на $5\rho g x = \rho g h$ — снова $x = h/5$.

Смысл: перетекание идёт, пока «вес столба» у дна сосудов разный; тяжёлая и лёгкая жидкости меняются местами слоями одинаковой высоты.

Ответ. $x = \dfrac{h}{5}$.