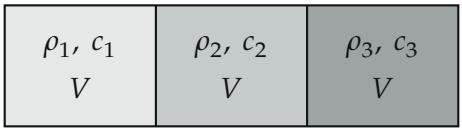
Средняя теплоёмкость тела

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 8 класс, задача 1] Тело составлено из трех частей одинакового объема, но с разными плотностями, которые относятся друг к другу как $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 2 : 4$. Удельные теплоемкости этих частей — также разные и относятся друг к другу как $c_1 : c_2 : c_3 = 3 : 2 : 1$. Найти среднюю удельную теплоемкость тела, если большая из удельных теплоемкостей его частей равна c.



Поясняющий рисунок: три части равного объёма V; чем темнее, тем плотнее

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс и смысл средней величины. Средняя удельная теплоёмкость — такая $c_{\text{ср}}$, что однородное тело той же массы нагревается от той же теплоты на столько же, сколько наше составное. Все части нагреваются на одно и то же ΔT (тело одно, части в тепловом контакте), поэтому теплоту удобно считать на один градус. Главная идея: усреднять надо не теплоёмкости частей, а с весами — массами частей, а массы при равных объёмах пропорциональны плотностям.

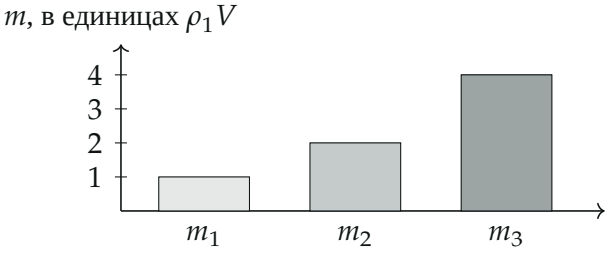
Обозначения. V — объём каждой части; m_1, m_2, m_3 — их массы; ΔT — нагрев; Q — полученная телом теплота; $c_{\text{ср}}$ — искомая средняя удельная теплоёмкость. Самая большая теплоёмкость — $c_1 = c$, поэтому $c_2 = \frac{2}{3}c$, $c_3 = \frac{1}{3}c$.

1. Массы частей. При одинаковом объёме $m_i = \rho_i V$, поэтому

$$m_1 : m_2 : m_3 = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 2 : 4,$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)V = 7\rho_1 V.$$

Самая тяжёлая часть — третья, у неё самая маленькая теплоёмкость.

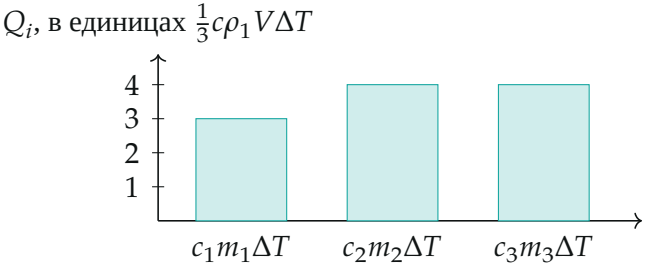


Массы частей: при равных объёмах они относятся как плотности, $1:2:4$

2. Теплота, которую получает тело. Запишем уравнение теплового баланса: теплота Q целиком уходит на нагрев трёх частей, каждая нагревается на ΔT:

$$Q = c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T + c_3 m_3 \Delta T = (c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3)\, V\Delta T.$$

В единицах $\frac{1}{3}c\cdot\rho_1 V\Delta T$ вклады частей равны $3\cdot 1 = 3$, $2\cdot 2 = 4$ и $1\cdot 4 = 4$: лёгкая часть с большой теплоёмкостью забирает теплоты даже меньше, чем две другие.



Теплота на нагрев каждой части: $3:4:4$, *всего* 11 *единиц*

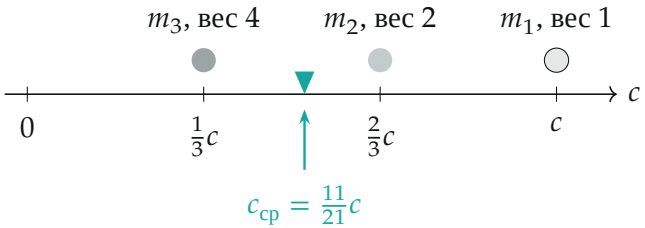
3. Определение средней теплоёмкости. Однородное тело массы m с теплоёмкостью $c_{\text{ср}}$ при той же теплоте нагрелось бы на то же ΔT:

$$Q = c_{\text{ср}}\, m\, \Delta T = c_{\text{ср}}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)\, V\Delta T.$$

Приравняем два выражения для Q; V и ΔT сокращаются:

$$c_{\text{ср}} = \frac{c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3},$$

$$c_{\text{ср}} = \frac{c\cdot 1 + \frac{2}{3}c\cdot 2 + \frac{1}{3}c\cdot 4}{1+2+4} = \frac{\frac{11}{3}c}{7} = \frac{11}{21}\,c.$$



Среднее «взвешенное по массам»: тяжёлая часть с малой теплоёмкостью тянет $c_{ср}$ вниз, ниже простого среднего $\frac{2}{3}c$

Обратите внимание: простое среднее $\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3) = \frac{2}{3}c$ здесь неверно — оно годилось бы при равных *массах*, а равны у частей объёмы.

Проверка. Размерность: дробь из теплоёмкостей, умноженных на плотности, делённая на сумму плотностей, — удельная теплоёмкость. Ответ лежит между наименьшей $\frac{1}{3}c$ и наибольшей c, как и положено среднему. Предел: если бы все плотности были равны, получилось бы $\frac{3+2+1}{3\cdot 3}c = \frac{2}{3}c$ — простое среднее. Второй способ, числом: возьмём $c = 4200$ Дж/(кг·К), $\rho_1 V = 1$ кг; на градус нужно $4200\cdot 1 + 2800\cdot 2 + 1400\cdot 4 = 15\,400$ Дж на 7 кг, то есть $2200 = \frac{11}{21}\cdot 4200$ Дж/(кг·К).

Смысл: средняя удельная теплоёмкость — это теплоёмкость всего тела, делённая на его массу, и самая тяжёлая часть сильнее всех влияет на результат.

Ответ. $c_{\text{ср}} = \dfrac{c_1\rho_1 + c_2\rho_2 + c_3\rho_3}{\rho_1+\rho_2+\rho_3} = \dfrac{11}{21}\,c \approx 0{,}52\,c.$