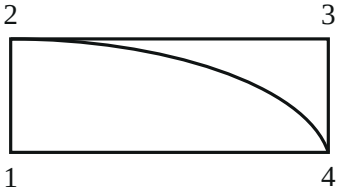
Тепловой поток в стержнях

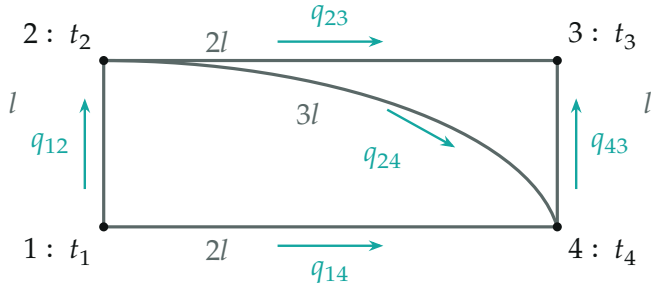
Задача 5. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 8 класс, задача 5] Имеется прямоугольник 1234, изготовленный из металлических стержней одинакового материала и одинакового сечения, причем длины сторон прямоугольника относятся как 1-2 : 1-4 = 1 : 2. Вершины 2 и 4 связаны таким же (но кривым) стержнем с длиной, втрое большей длины стержня 1-2. Температуры вершин 1 и 3 поддерживаются постоянными и равными $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$, $t_3 = 0\,^\circ\text{C}$. Найти температуры вершин 2 и 4?



Указание. Тепловой поток между точками, температуры которых поддерживаются постоянными, пропорционален разности температур точек, обратно пропорционален расстоянию между ними и коэффициенту теплопроводности среды между ними (закон Фурье). Считать, что боковые поверхности стержней теплоизолированы.

▲ **Решение. Что происходит.** Тепло течёт от горячей вершины 1 к холодной 3 по двум путям — через вершину 2 и через вершину 4 — и ещё по кривому стержню между 2 и 4. Режим установившийся: температуры вершин 2 и 4 не меняются, значит, сколько тепла в каждую из них втекает за секунду, столько и вытекает. Это задача-«цепь»: стержни — как резисторы, температура — как потенциал, тепловой поток — как ток, а условие для вершины — как закон для узла.

Обозначения. l — длина стержня 1-2; тогда $l_{23} = l_{14} = 2l$, $l_{34} = l$, $l_{24} = 3l$. По закону Фурье поток по стержню длины L между концами с температурами $t_a > t_b$ равен $q = kS\dfrac{t_a - t_b}{L}$, где k — теплопроводность, S — сечение; у всех стержней kS одинаково и дальше сократится. Пусть $t_2 > t_4$ (проверим в конце), тогда по кривому стержню тепло идёт от 2 к 4.



Тепловые потоки по стержням (бирюза) и длины стержней (серым)

1. Баланс тепла для вершины 2. В установившемся режиме поток, приходящий в вершину 2 по стержню 1-2, равен сумме потоков, уходящих по стержням 2-3 и 2-4: $q_{12} = q_{23} + q_{24}$. По закону Фурье, сократив kS,

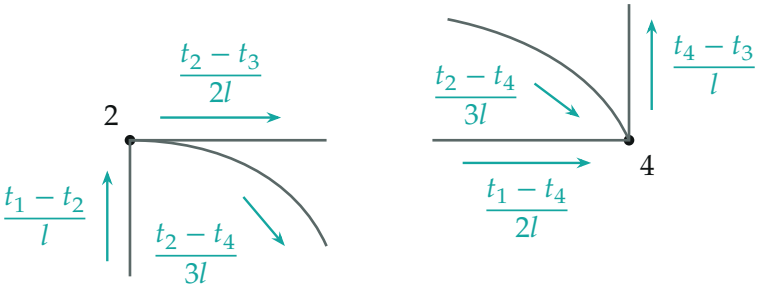
$$\frac{t_1 - t_2}{l} = \frac{t_2 - t_3}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l}.$$

Умножим на $6l$: $6t_1 - 6t_2 = 3t_2 - 3t_3 + 2t_2 - 2t_4$, то есть

$$11t_2 - 2t_4 = 6t_1 + 3t_3. \qquad (1)$$

2. Баланс тепла для вершины 4. В вершину 4 тепло приходит по стержням 1-4 и 2-4, уходит по стержню 4-3: $q_{43} = q_{14} + q_{24}$:

$$\frac{t_4 - t_3}{l} = \frac{t_1 - t_4}{2l} + \frac{t_2 - t_4}{3l} \quad \Rightarrow \quad 11t_4 - 2t_2 = 3t_1 + 6t_3. \qquad (2)$$



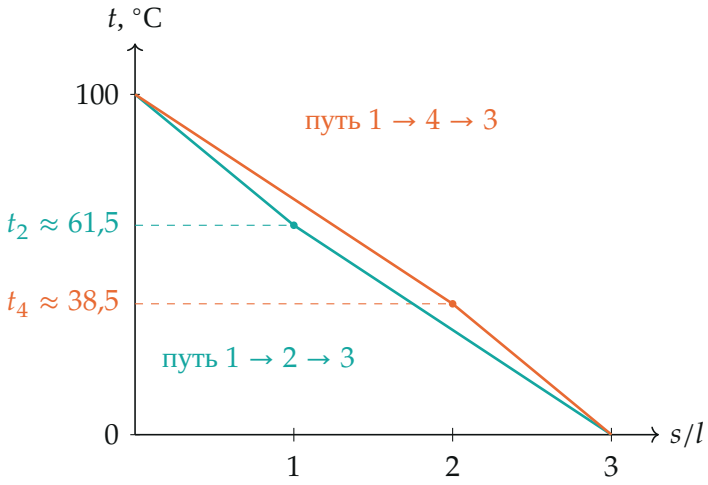
Узлы 2 и 4: что втекает, то и вытекает (потоки — в единицах kS)

3. Решаем систему. Подставим $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$, $t_3 = 0\,^\circ\text{C}$: $11t_2 - 2t_4 = 600$, $11t_4 - 2t_2 = 300$. Из второго $t_4 = \dfrac{300 + 2t_2}{11}$; подставим в первое: $121t_2 - 600 - 4t_2 = 6600$, $117t_2 = 7200$. В общем виде

$$t_2 = \frac{72t_1 + 45t_3}{117} = \frac{8t_1 + 5t_3}{13} \approx 61{,}5\,^\circ\text{C}, \qquad t_4 = \frac{5t_1 + 8t_3}{13} \approx 38{,}5\,^\circ\text{C}.$$

Предположение $t_2 > t_4$ подтвердилось: по кривому стержню тепло действительно идёт от 2 к 4.

Обратите внимание: вершины 2 и 4 стоят несимметрично относительно 1 и 3: вершина 2 соединена с горячей вершиной 1 *коротким* стержнем, поэтому она горячее; у вершины 4 короткий стержень ведёт к холодной вершине 3.



Температура вдоль стержней от вершины 1 *(*s *— путь от вершины* 1*): по каждому стержню она меняется линейно*

Проверка. Размерность: в (1) и (2) слева и справа — температуры. Потоки в единицах kS/l: $q_{12} = 38{,}5$, $q_{23} = \frac{61{,}5}{2} = 30{,}8$, $q_{24} = \frac{23{,}1}{3} = 7{,}7$ — в узле 2 сходится ($30{,}8 + 7{,}7 = 38{,}5$). Второй способ — симметрия: замена $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$ переводит стержни друг в друга (1-2 ↔ 3-4, 2-3 ↔ 4-1, 2-4 на месте), а температуры отражаются относительно $50\,^\circ\text{C}$. Значит, $t_2 + t_4 = t_1 + t_3 = 100\,^\circ\text{C}$ — верно: $61{,}5 + 38{,}5 = 100$. С этим

одно уравнение (1) даёт $11t_2 - 2(100 - t_2) = 600$, $t_2 = 800/13 \approx 61{,}5\,^\circ\text{C}$. Предел: без кривого стержня $t_2 = t_1 - \frac{1}{3}(t_1 - t_3) \approx 66{,}7\,^\circ\text{C}$, $t_4 \approx 33{,}3\,^\circ\text{C}$; кривой стержень, перенося тепло от 2 к 4, сближает их температуры — так и вышло.

Смысл: стационарное распределение температур в сетке стержней находится так же, как потенциалы в цепи резисторов: в каждом узле сумма втекающих потоков равна сумме вытекающих.

Ответ. $t_2 = \dfrac{8t_1 + 5t_3}{13} \approx 61{,}5\,^\circ\text{C}$, $t_4 = \dfrac{5t_1 + 8t_3}{13} \approx 38{,}5\,^\circ\text{C}$.