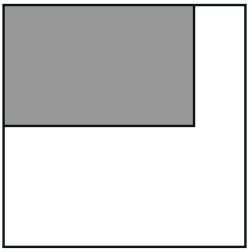
Кубик из двух частей

Задача 1. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 1] Кубик составили из двух частей, имеющих разную плотность (см. рисунок). Одна часть, плотность которой равна ρ_1, составляет третью часть объёма кубика, но четвертую часть его массы. Найдите плотность второй части кубика.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на определение плотности: масса тела складывается из масс частей, а масса каждой части — плотность на объём. Две доли из условия (по объёму и по массе) дают одно уравнение на неизвестную плотность.

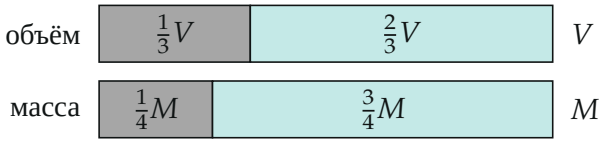
Обозначения. V — объём кубика, M — его масса; $V_1 = \frac{V}{3}$, m_1 — объём и масса первой части; V_2, m_2, ρ_2 — второй.

1. Объёмы частей. Первая часть — треть объёма, значит, вторая — остальное:

$$V_1 = \frac{V}{3}, \qquad V_2 = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}.$$

2. Массы частей. По определению плотности $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \frac{V}{3}$. Первая часть — четверть массы кубика, значит, $M = 4m_1$, и на вторую часть приходится

$$m_2 = M - m_1 = 3m_1 = \rho_1 V.$$



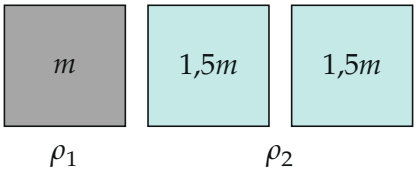
Доли частей: первая (серым) — треть объёма, но лишь четверть массы; вторая (бирюзой) — две трети объёма и три четверти массы

3. Плотность второй части.

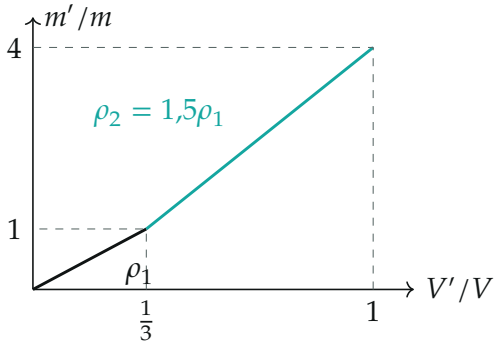
$$\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{\rho_1 V}{2V/3} = \frac{3}{2}\rho_1.$$

Знак сравнения: $\rho_2 > \rho_1$ — вторая часть плотнее, ведь на «грамм объёма» у неё больше массы.

4. Второй способ — три одинаковых куска. Мысленно разрежем кубик на три равные по объёму части: одна — первая часть, две — вторая. Пусть масса первой равна m; тогда весь кубик — $4m$, и на две трети второй части приходится $3m$, по $1{,}5m$ на каждую треть. Куски одного объёма, массы относятся как $1{,}5 : 1$ — так же относятся и плотности.



Три куска равного объёма: масса первой части m, второй — $3m$, по $1{,}5m$ на кусок



Масса части кубика объёмом V' (от первой части ко второй, m — масса первой): наклон графика — плотность; на второй части он в $1{,}5$ раза круче

Обратите внимание: «треть объёма» и «четверть массы» — доли от разных величин, их нельзя делить друг на друга напрямую; сначала находим массу и объём второй части.

Проверка. Размерность: $\rho_2 = \frac{3}{2}\rho_1$ — плотность. Подстановка: $M = \rho_1 \frac{V}{3} + \frac{3}{2}\rho_1 \cdot \frac{2V}{3} = \frac{4}{3}\rho_1 V$, доля первой части $\frac{\rho_1 V/3}{4\rho_1 V/3} = \frac{1}{4}$ — как в условии. Предел: если бы первая часть занимала треть массы (а не четверть), получилось бы $\rho_2 = \rho_1$ — однородный кубик.

Смысл: первая часть «легче своего объёма», значит, вторая обязана быть плотнее.

Ответ. $\rho_2 = \dfrac{3}{2}\rho_1$.