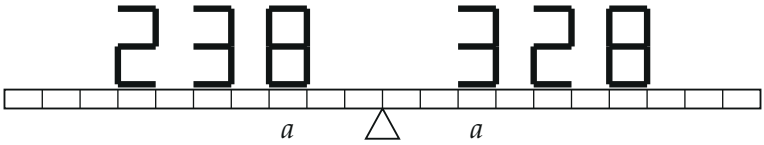
Макеты чисел на весах

Задача 2. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 2] Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры — один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце второго коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?

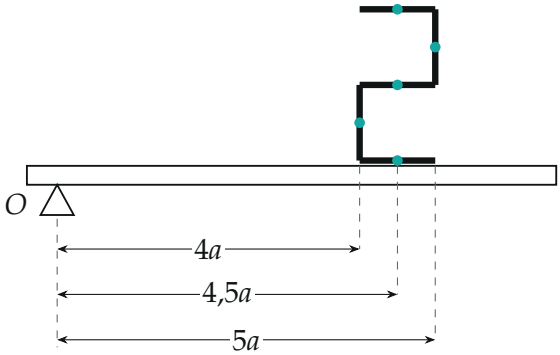


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага. В каждом числе по 17 стержней (в «2» и «3» по 5, в «8» — 7), так что массы макетов одинаковы. Но весы-коромысло сравнивают не силы тяжести, а их моменты относительно опоры: перевешивает та сторона, где больше сумма «сила × плечо». Поэтому нужно аккуратно найти плечо каждого стержня.

Обозначения. O — опора (середина коромысла); x — расстояние от опоры вдоль коромысла; $M_л$, $M_п$ — суммарные моменты сил тяжести стержней слева и справа; m_0 — искомый груз. Коромысло однородно и симметрично, его собственный момент относительно O равен нулю.

1. Где стоят цифры. Коромысло разбито на 20 клеток по a. По рисунку каждая цифра шириной в одну клетку и высотой в два стержня. Слева от опоры «8» занимает клетку от $2a$ до $3a$, «3» — от $4a$ до $5a$, «2» — от $6a$ до $7a$. Справа «3» — от $2a$ до $3a$, «2» — от $4a$ до $5a$, «8» — от $6a$ до $7a$.

2. Плечо каждого стержня. Сила тяжести стержня приложена в его середине и направлена вертикально, поэтому плечо — горизонтальное расстояние от середины стержня до опоры. У горизонтального стержня цифры, стоящей в клетке от x_0 до $x_0 + a$, плечо $x_0 + \frac{a}{2}$; у вертикального — x_0 (ближний к опоре край) или $x_0 + a$ (дальний).



Цифра «2» справа, в клетке от 4a до 5a: центры её стержней (точки) и плечи сил тяжести относительно опоры O. Горизонтальные стержни — плечо 4,5a, вертикальные — 4a или 5a

3. Моменты цифр. В «2» и «3» по три горизонтальных стержня, в «8» — тоже три. Вертикальные: у «2» — правый верхний и левый нижний, у «3» — оба правых, у «8» — все четыре. Для цифры слева от опоры ближний к ней край — правый, для цифры справа — левый. Момент в единицах amg:

слева:	«2»: $3 \cdot 6{,}5 + 6 + 7 = 32{,}5$,	«3»: $3 \cdot 4{,}5 + 4 + 4 = 21{,}5$,
	«8»: $3 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 17{,}5$;	
справа:	«3»: $3 \cdot 2{,}5 + 3 + 3 = 13{,}5$,	«2»: $3 \cdot 4{,}5 + 4 + 5 = 22{,}5$,
	«8»: $3 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 45{,}5$.	

Суммы:

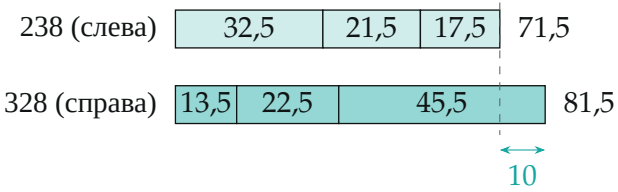
$$M_{\text{л}} = (32{,}5 + 21{,}5 + 17{,}5)\, amg = 71{,}5\, amg,$$

$$M_{\text{п}} = (13{,}5 + 22{,}5 + 45{,}5)\, amg = 81{,}5\, amg.$$

По правилу моментов относительно опоры перевешивает сторона с большим моментом:

$$\Delta M = M_{\text{п}} - M_{\text{л}} = 10\, amg > 0,$$

то есть перевешивает число 328 (справа). Причина — «тяжёлая» восьмёрка у 328 стоит далеко от опоры, а у 238 — близко.



Моменты сил тяжести цифр относительно опоры в единицах amg (по цифрам слева направо от опоры наружу: для 238 — «2», «3», «8» от края; для 328 — «3», «2», «8» от опоры)

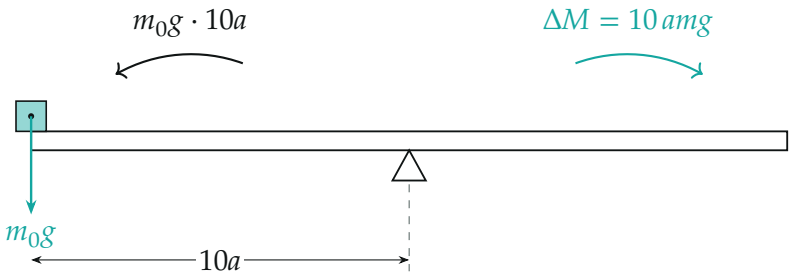
4. Второй способ — сравниваем цифры попарно. Цифры стоят симметрично относительно опоры: слева «2», «3», «8» в клетках $6a$–$7a$, $4a$–$5a$, $2a$–$3a$, справа в тех же клетках «8», «2», «3». Сравним каждую пару на одинаковом расстоянии; совпадающие стержни дают равные моменты и сокращаются.

- Клетка $6a$–$7a$: «2» слева, «8» справа. У «8» по сравнению с «2» два лишних вертикальных стержня, с плечами $6a$ и $7a$: $+13\,amg$ правой стороне.
- Клетка $4a$–$5a$: «3» слева, «2» справа. Горизонтальные стержни одинаковы. Вертикальные у «3» слева стоят на ближнем к опоре крае (плечи $4a$ и $4a$), у «2» справа — на $5a$ и $4a$: $+5\,amg - 4\,amg = +1\,amg$ правой стороне.
- Клетка $2a$–$3a$: «8» слева, «3» справа. Вертикальные на дальнем крае ($3a$) есть у обеих цифр и сокращаются; у «8» ещё два на ближнем крае с плечом $2a$: $-4\,amg$ правой стороне.

Итог: $\Delta M = (13 + 1 - 4)\,amg = 10\,amg$ — то же.

5. Груз для равновесия. Перевешивает правая сторона, значит, груз кладём на конец левого плеча, на расстоянии $10a$ от опоры. Правило моментов относительно O для равновесия:

$$m_0 g \cdot 10a = \Delta M = 10\,amg \quad \Rightarrow \quad m_0 = m.$$



Лишний момент $10\,amg$ поворачивает коромысло по часовой стрелке; груз m_0 на левом конце (плечо $10a$) создаёт такой же момент против часовой

Обратите внимание: равенство масс макетов ничего не решает — весы-коромысло «взвешивают» моменты. И одна и та же цифра даёт разный момент слева и справа от опоры: её вертикальные стержни оказываются у разных (ближнего или дальнего) краёв клетки.

Проверка. Размерность: $[m_0] = \frac{[amg]}{[a][g]}$ — масса. Число стержней: слева $5 + 5 + 7 = 17$, справа $5 + 5 + 7 = 17$, всего 34 — как в условии. Второй взгляд: перевес означает, что общий центр масс 34 стержней смещён вправо от опоры на $\frac{10\,amg}{34\,mg} \approx 0{,}3a$; груз m на расстоянии $10a$ слева возвращает его на опору: $\frac{34m \cdot 0{,}294a - m \cdot 10a}{35m} = 0$. Смысл: один стержень массой m на конце коромысла уравновешивает целую разницу в расположении семнадцати стержней.

Ответ. Перевесит число 328 (момент его сил тяжести относительно опоры на $10\,amg$ больше); на конец левого плеча коромысла (на расстояние $10a$ от опоры) нужно положить груз массой $m_0 = m$.