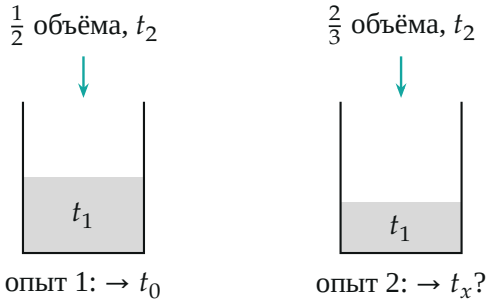
Смешивание воды в калориметре

Задача 3. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 3] В калориметр налита вода комнатной температуры $t_1 = 20\,^\circ\text{C}$. Объём воды составляет половину объёма калориметра. Когда в калориметр доливают столько же воды, имеющей температуру $t_2 = 30\,^\circ\text{C}$, в нём устанавливается температура $t_0 = 24\,^\circ\text{C}$. Другой точно такой же калориметр, находящийся при комнатной температуре, содержит воду, объём которой составляет одну треть объёма калориметра. Какая установится температура в этом калориметре, если его доверху заполнить водой с температурой t_2? Рассеянием тепла в окружающее пространство пренебречь.



Поясняющий рисунок: два опыта с одинаковыми калориметрами при комнатной температуре t_1

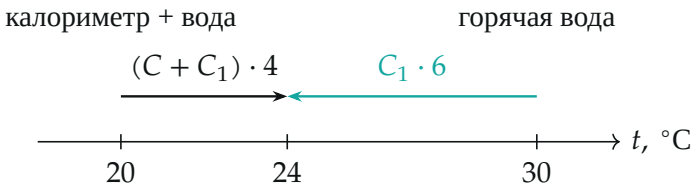
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса. Если бы калориметр не нагревался, смесь равных порций воды при 20 и 30 °C имела бы 25 °C; получилось 24 °C — значит, часть тепла горячей воды ушла на нагрев самого калориметра. Первый опыт позволяет найти теплоёмкость калориметра, второй — искомую температуру.

Обозначения. C — теплоёмкость калориметра; C_1 — теплоёмкость воды объёмом в половину калориметра (теплоёмкость воды пропорциональна её объёму); t_x — искомая температура.

1. Тепловой баланс первого опыта. Потерь нет, поэтому теплота, отданная горячей водой при остывании от t_2 до t_0, равна теплоте, полученной калориметром и холодной водой при нагревании от t_1 до t_0

(калориметр был при комнатной температуре, как и вода в нём):

$$(C+C_1)(t_0-t_1) = C_1(t_2-t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{C_1} = \frac{t_2+t_1-2t_0}{t_0-t_1} = \frac{30+20-48}{4} = \frac{1}{2}$$



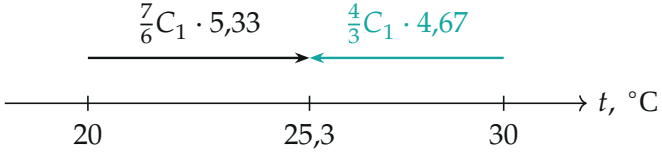
Опыт 1 на шкале температур: горячая вода остывает на 6°, калориметр с холодной водой нагреваются на 4°; отданное равно полученному

2. Тепловой баланс второго опыта. В калориметре треть объёма, это $\frac{2}{3}$ от половины: теплоёмкость $\frac{2}{3}C_1$. Доливают остальные две трети объёма, теплоёмкость $\frac{4}{3}C_1$. Баланс:

$$\left(C + \frac{2}{3}C_1\right)(t_x - t_1) = \frac{4}{3}C_1(t_2 - t_x).$$

Подставим $C = \frac{1}{2}C_1$ и сократим на C_1: $\frac{7}{6}(t_x - t_1) = \frac{4}{3}(t_2 - t_x)$, то есть $7(t_x - t_1) = 8(t_2 - t_x)$:

$$t_x = \frac{7t_1 + 8t_2}{15} = \frac{140 + 240}{15}\,^\circ\text{C} \approx 25{,}3\,^\circ\text{C}.$$



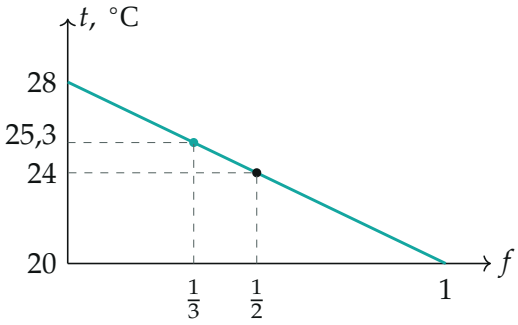
Опыт 2: обе теплоты равны 6,22 C_1 (в градусах)

3. Второй способ — общая формула. Пусть холодная вода занимает долю f объёма калориметра, горячая — $1 - f$; их теплоёмкости $2fC_1$ и

$2(1-f)C_1$. Из баланса установившаяся температура — среднее, взвешенное по теплоёмкостям (калориметр — с весом $C = \frac{1}{2}C_1$ при t_1):

$$t(f) = \frac{\frac{1}{2}t_1 + 2f\,t_1 + 2(1-f)\,t_2}{\frac{1}{2} + 2}.$$

При $f = \frac{1}{2}$: $t = \frac{10+20+30}{2{,}5} = 24\,^\circ\text{C}$ — первый опыт; при $f = \frac{1}{3}$: $t = \frac{10+13{,}3+40}{2{,}5} \approx 25{,}3\,^\circ\text{C}$ — то же.



Температура смеси в зависимости от доли холодной воды f (калориметр долит доверху горячей): точки — опыт 1 и опыт 2

Обратите внимание: без учёта калориметра вышло бы $t = \frac{t_1+2t_2}{3} \approx 26{,}7\,^\circ\text{C}$ — неверно; именно $t_0 = 24\,^\circ\text{C}$, а не $25\,^\circ\text{C}$ в первом опыте говорит, что калориметр забирает тепло.

Проверка. Размерность: t_x — взвешенное среднее температур (сумма весов $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} = 1$), градусы. Ответ между t_1 и t_2. При $f \to 1$ (горячей не доливают) $t \to t_1$, при $f = 0$ получаем $28\,^\circ\text{C} < 30\,^\circ\text{C}$: часть тепла всегда уходит калориметру.

Смысл: калориметр «весит» как четверть его объёма воды, и это смещает обе температуры смеси к комнатной.

Ответ. $t_x = \dfrac{7t_1 + 8t_2}{15} \approx 25{,}3\,^\circ\text{C}$.