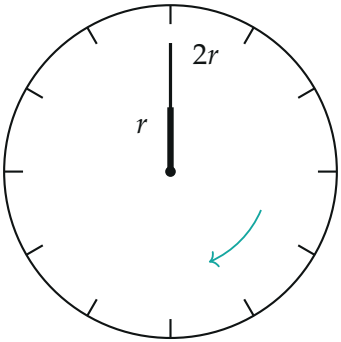
Стрелки часов

Задача 4. [Росатом 2017/18, заключительный этап, 9 класс, задача 4] Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?



Поясняющий рисунок: момент совпадения стрелок; обе вращаются по часовой стрелке

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на относительное движение по окружности. Скорость удаления концов стрелок — это скорость изменения расстояния между ними, а расстояние между двумя точками одинаково в любой системе отсчёта. Поэтому выгодно перейти в систему отсчёта минутной стрелки: в ней конец минутной стрелки неподвижен, а конец часовой равномерно бегает по окружности. Остаётся геометрия: когда равномерно движущаяся точка быстрее всего удаляется от неподвижной.

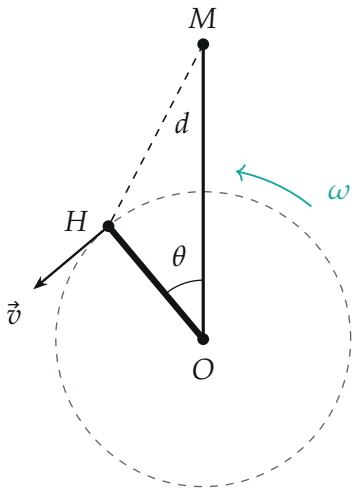
Обозначения. r — длина часовой стрелки, $2r$ — минутной; O — ось часов; M — конец минутной стрелки, H — конец часовой; $\omega_{\text{м}} = \frac{2\pi}{60\ \text{мин}}$, $\omega_{\text{ч}} = \frac{2\pi}{12{\cdot}60\ \text{мин}}$ — их угловые скорости; θ — угол между стрелками; $d = MH$; $u = \frac{\Delta d}{\Delta t}$ — скорость удаления.

1. Переход в систему минутной стрелки. Минутная стрелка обгоняет часовую, поэтому в системе отсчёта, вращающейся вместе с минутной стрелкой, часовая поворачивается назад — против часовой стрелки

— с угловой скоростью

$$\omega = \omega_м - \omega_ч = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)\frac{1}{\text{мин}} = \frac{2\pi \cdot 11}{720\ \text{мин}}.$$

Угол между стрелками растёт равномерно: $\theta = \omega t$. Точка H движется в этой системе по окружности радиуса r со скоростью постоянного модуля $v = \omega r$, направленной по касательной.



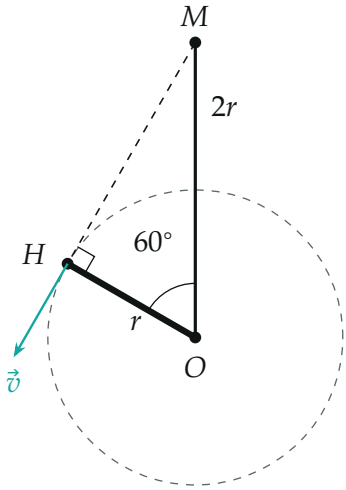
В системе минутной стрелки: M неподвижна, H бежит по окружности радиуса r против часовой стрелки со скоростью $v = \omega r$

2. Когда скорость удаления максимальна. Скорость изменения расстояния MH — это проекция скорости $\vec{v}$ точки H на направление от M к H (точка M неподвижна): $u = v\cos\beta$, где β — угол между $\vec{v}$ и прямой MH. Модуль v постоянен, поэтому u максимальна и равна v, когда $\beta = 0$: скорость $\vec{v}$ направлена вдоль прямой MH от M. Скорость направлена по касательной к окружности, значит, в этот момент MH — касательная к окружности радиуса r, и радиус OH ей перпендикулярен.

3. Угол между стрелками. В прямоугольном треугольнике OHM с прямым углом при H катет $OH = r$ и гипотенуза $OM = 2r$:

$$\cos\theta = \frac{OH}{OM} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Такая касательная есть и при $\theta = 300°$, но там скорость направлена к M — это максимальная скорость сближения. Первым после совпадения стрелок наступает $\theta = 60°$.



Момент максимального удаления: скорость $\vec{v}$ точки H направлена вдоль MH, касательная $MH \perp OH$, и $\cos\theta = r/2r$

4. Время. Угол θ растёт с постоянной угловой скоростью ω, поэтому

$$\Delta t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/3}{2\pi \cdot 11/(720\text{ мин})} = \frac{720}{6\cdot 11}\text{ мин} = \frac{120}{11}\text{ мин} \approx 10{,}9\text{ мин}.$$

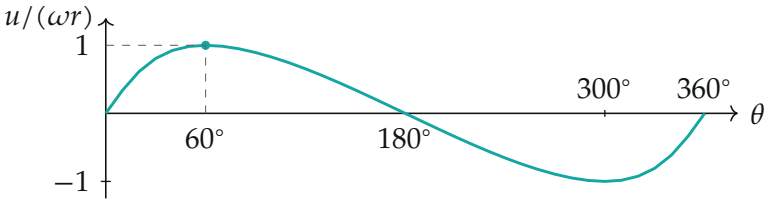
Это шестая часть времени $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{720}{11}$ мин $\approx 65{,}5$ мин, за которое минутная стрелка обгоняет часовую на полный оборот.

5. Второй способ — формула расстояния. По теореме косинусов $d = \sqrt{r^2 + 4r^2 - 4r^2\cos\theta} = r\sqrt{5 - 4\cos\theta}$. Скорость удаления — производная по времени при $\dot\theta = \omega$:

$$u = \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = \frac{2\omega r\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}.$$

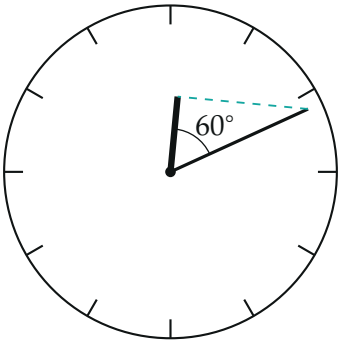
Приравняв нулю производную по θ, получим $\cos\theta\,(5 - 4\cos\theta) - 2\sin^2\theta = 0$, то есть $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$, откуда $\cos\theta = \frac{1}{2}$ (корень

2 не подходит) — снова 60°, и $u_{\max} = \frac{2\omega r \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \omega r = v$.



Скорость удаления концов стрелок в зависимости от угла между ними (по формуле шага 5): максимум ωr при 60°, при 300° — максимальное сближение

Обратите внимание: ответ не равен времени, когда расстояние между концами максимально (это $\theta = 180°$, через $\frac{360}{11} \approx 32{,}7$ мин): в момент наибольшего расстояния скорость удаления как раз равна нулю.



Часы через $\frac{120}{11} \approx 10{,}9$ мин после совпадения стрелок в 12:00: минутная повернулась на 65,5°, часовая — на 5,5°, угол между ними 60°, отрезок между концами (бирюзой) перпендикулярен часовой стрелке

Проверка. Размерность: θ/ω — время. Числа: за $\frac{120}{11}$ мин минутная стрелка поворачивается на $6°/\text{мин} \cdot \frac{120}{11}$ мин $\approx 65{,}45°$, часовая — на $0{,}5°/\text{мин} \cdot \frac{120}{11}$ мин $\approx 5{,}45°$, разность 60°.

Смысл: в момент максимального удаления конец часовой стрелки (в системе минутной) движется точно «от» конца минутной, и вся его скорость ωr идёт на рост расстояния.

Ответ. $\Delta t = \dfrac{\pi/3}{\omega_м - \omega_ч} = \dfrac{120}{11}$ мин $\approx 10{,}9$ мин.