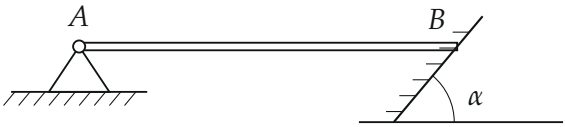
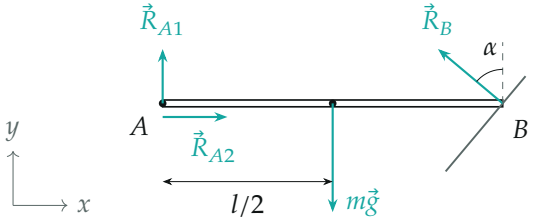
Стержень на шарнире и наклонной плоскости

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 10 класс, задача 1] Стержень AB массой m расположен горизонтально. Его левый конец закреплён шарнирно, правый опирается на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Найти силу реакции шарнира.



▲ **Решение. Что происходит.** Стержень покоится под действием трёх сил: тяжести, реакции гладкой плоскости и реакции шарнира. Направление реакции плоскости известно — по нормали к ней (трения нет). Направление реакции шарнира неизвестно, поэтому раскладываем её на вертикальную и горизонтальную составляющие. Неизвестных три (R_B и две составляющие R_A), уравнений статики тоже три: моменты и две проекции. Моменты удобно брать относительно шарнира — тогда неизвестная реакция R_A в уравнение не войдёт. Класс задачи — «статика твёрдого тела».

Обозначения. l — длина стержня; $\vec{R}_B$ — реакция плоскости в точке B; R_{A1}, R_{A2} — вертикальная и горизонтальная составляющие реакции шарнира $\vec{R}_A$; ось x — горизонтально вправо, ось y — вверх.



Силы на стержень. Реакция плоскости перпендикулярна плоскости и составляет угол α с вертикалью; реакция шарнира разложена на R_{A1} (вверх) и R_{A2} (вправо — направление проверим знаком)

1. Угол реакции плоскости. Нормаль к плоскости, наклонённой на α к горизонту, наклонена на α к вертикали (стороны углов взаимно перпендикулярны). Плоскость поднимается вправо, поэтому нормаль в точке B направлена вверх и влево:

$$R_{Bx} = -R_B \sin\alpha, \qquad R_{By} = R_B \cos\alpha.$$

2. Правило моментов относительно оси шарнира A. Плечо силы тяжести $l/2$, вертикальной составляющей R_B — l; горизонтальная составляющая R_B идёт вдоль стержня через A и момента не даёт:

$$mg\,\frac{l}{2} = R_B \cos\alpha \cdot l \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

3. Первое условие равновесия в проекциях. $\vec{R}_{A1} + \vec{R}_{A2} + \vec{R}_B + m\vec{g} = 0$:

$$x:\ R_{A2} - R_B \sin\alpha = 0 \ \Rightarrow\ R_{A2} = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha;$$

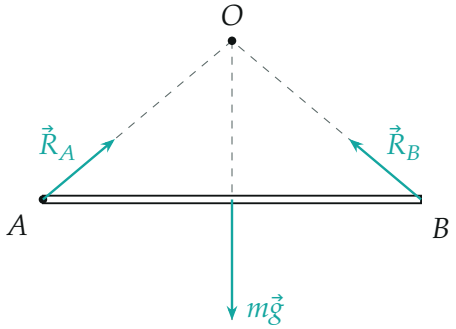
$$y:\ R_{A1} + R_B \cos\alpha - mg = 0 \ \Rightarrow\ R_{A1} = \frac{mg}{2}.$$

Знак: $R_{A2} > 0$ — горизонтальная составляющая реакции шарнира действительно направлена вправо, к плоскости.

4. Модуль реакции шарнира. По теореме Пифагора

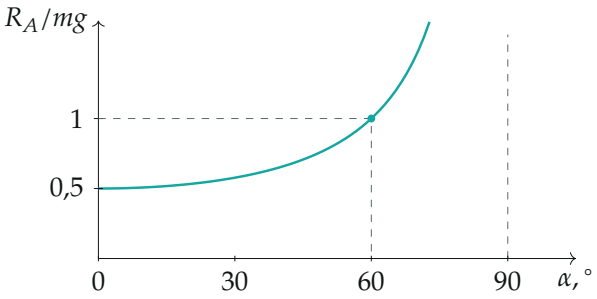
$$R_A = \sqrt{R_{A1}^2 + R_{A2}^2} = \frac{mg}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{mg}{2\cos\alpha}.$$

Она направлена под углом α к вертикали (вверх и вправо), так как $R_{A2}/R_{A1} = \operatorname{tg}\alpha$.



Три непараллельные силы в равновесии пересекаются в одной точке O: линия $\vec{R}_A$ симметрична линии $\vec{R}_B$ относительно вертикали через центр стержня, поэтому $R_A = R_B$

Обратите внимание. Реакция шарнира *не* направлена вдоль стержня и не вертикальна: у неё есть горизонтальная составляющая, уравновешивающая горизонтальную составляющую реакции плоскости.



Реакция шарнира от угла наклона плоскости, $R_A = \frac{mg}{2\cos\alpha}$: при $\alpha = 60°$ она равна mg, при $\alpha \to 90°$ неограниченно растёт

Проверка. Размерность: mg — сила. Предел $\alpha = 0$: плоскость горизонтальна, стержень лежит на двух опорах, каждая держит половину веса, $R_A = mg/2$ — совпадает. Предел $\alpha \to 90°$: почти вертикальная стенка может держать стержень по вертикали лишь огромной нормальной силой, и такой же огромной становится горизонтальная реакция шарнира. Второй способ: теорема о трёх силах (рисунок с точкой O) — линии $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ симметричны, их вертикальные составляющие равны $mg/2$, и $R_A = \frac{mg/2}{\cos\alpha}$.

Смысл: шарнир и плоскость делят вес стержня пополам по вертикали, а горизонтальные силы между ними взаимно уравновешены.

Ответ. $R_A = \dfrac{mg}{2\cos\alpha}$ (направлена под углом α к вертикали, вверх и в сторону плоскости).