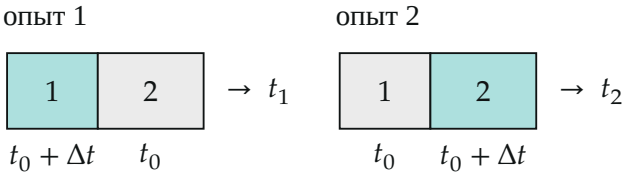
Тепловой контакт двух тел

Задача 2. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 10 класс, задача 2] Два тела 1 и 2 имеют равные температуры. Температуру тела 1 увеличивают на некоторую величину Δt, приводят его в тепловой контакт с телом 2 и дожидаются установления теплового равновесия. Затем тела охлаждают до первоначальной температуры, нагревают на ту же величину тело 2 и приводят в тепловой контакт с телом 1. Найти отношение теплоёмкостей тел C_1/C_2, если известно, что разность температур, установившихся во втором и в первом случаях, составляет одну треть от температуры Δt. Потерями тепла пренебречь.



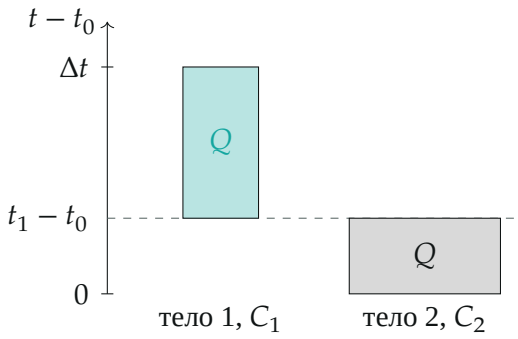
Поясняющий рисунок: в первом опыте нагрето тело 1, во втором — тело 2 (бирюзовым — нагретое)

▲ **Решение. Что происходит.** В каждом опыте нагретое тело отдаёт теплоту холодному, пока температуры не сравняются; потерь нет, значит, отданное равно полученному — уравнение теплового баланса. Установившаяся температура ближе к начальной температуре тела с *большей* теплоёмкостью. Если $C_1 < C_2$, в первом опыте (горячее тело 1 с малой теплоёмкостью) общая температура выйдет ниже, чем во втором; по разности $t_2 - t_1$ и находим C_1/C_2. Класс задачи — «теплообмен без потерь».

Обозначения. t_0 — начальная температура обоих тел; t_1, t_2 — установившиеся температуры в первом и во втором опытах; $x = C_1/C_2$.

1. Уравнение теплового баланса, опыт 1. Тело 1 остывает от $t_0 + \Delta t$ до t_1, тело 2 нагревается от t_0 до t_1:

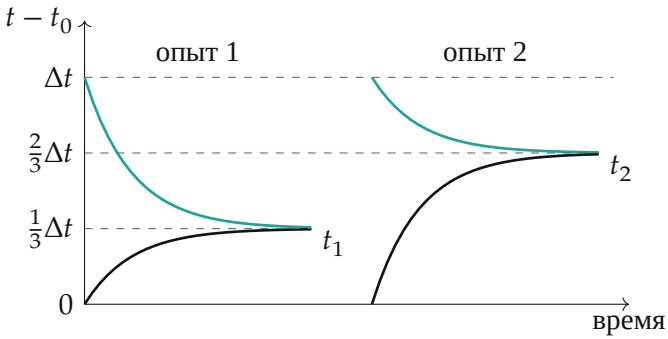
$$C_1(t_0 + \Delta t - t_1) = C_2(t_1 - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\Delta t = \frac{x}{1+x}\Delta t.$$



Тепловой баланс в опыте 1: площадь «ширина C × высота изменения температуры» — теплота; отданная телом 1 равна полученной телом 2 (числа — при $C_1/C_2 = \frac{1}{2}$)

2. Опыт 2. Теперь горячее тело 2:

$$C_2(t_0 + \Delta t - t_2) = C_1(t_2 - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_0 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\Delta t = \frac{1}{1+x}\Delta t.$$



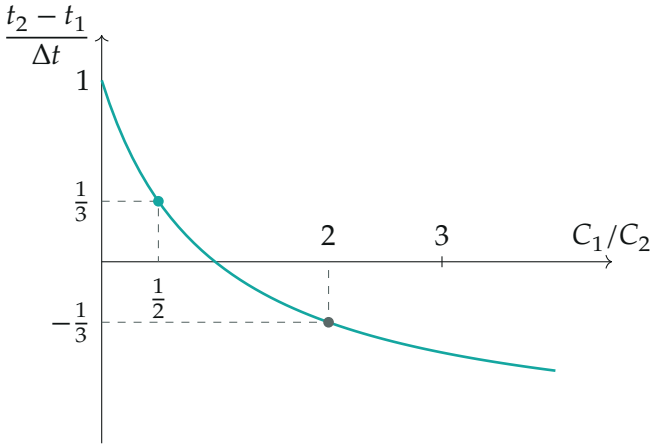
Температуры тел во времени при найденном $C_1/C_2 = \frac{1}{2}$ (бирюзовым — нагретое тело, чёрным — холодное): $t_1 - t_0 = \frac{1}{3}\Delta t$, $t_2 - t_0 = \frac{2}{3}\Delta t$, разность $\frac{1}{3}\Delta t$

3. Разность установившихся температур.

$$t_2 - t_1 = \frac{1-x}{1+x}\Delta t.$$

По условию $t_2 - t_1 = \dfrac{\Delta t}{3}$:

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 - 3x = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2}.$$



Разность установившихся температур от отношения теплоёмкостей: значение $+\frac{1}{3}$ даёт $C_1/C_2 = \frac{1}{2}$; значение $-\frac{1}{3}$ (если бы разность бралась в обратном порядке) дало бы 2

Обратите внимание. Важен порядок вычитания: «во втором минус в первом». Если понимать разность по модулю, подошло бы и $C_1/C_2 = 2$ (серая точка на графике) — это та же ситуация с переставленными телами.

Проверка. Размерность: x безразмерно. Числа: при $C_1 = C_2/2$ в опыте 1 $t_1 - t_0 = \frac{1/2}{3/2}\Delta t = \frac{1}{3}\Delta t$, в опыте 2 $t_2 - t_0 = \frac{1}{3/2}\Delta t = \frac{2}{3}\Delta t$, разность $\frac{1}{3}\Delta t$. Предел $C_1 = C_2$: опыты симметричны, $t_2 = t_1$ — по формуле $\frac{1-1}{2} = 0$.

Смысл: тело с меньшей теплоёмкостью, будучи нагретым, мало поднимает общую температуру, поэтому опыт с нагретым телом 2 даёт более высокую конечную температуру.

Ответ. $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{1}{2}$.