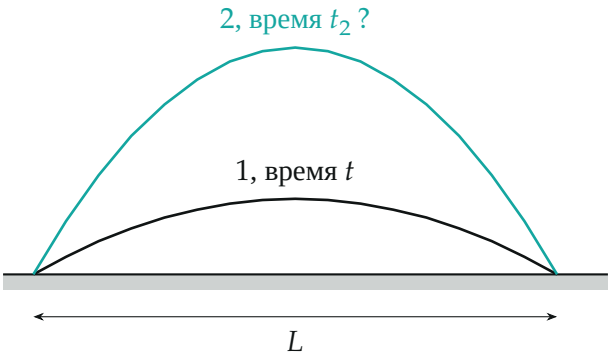
Два броска на одну дальность

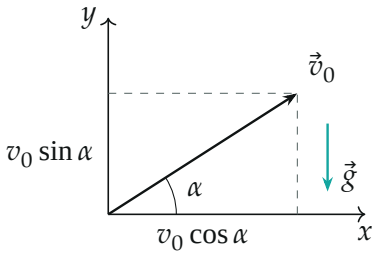
Задача 3. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 10 класс, задача 3] Тело два раза бросали с поверхности земли — с одинаковой по величине скоростью, но под разными углами к горизонту. Дальность полёта тела в обоих случаях оказалась одной и той же и равной L. Известно, что время полёта при первом броске было равно t. Найти время полёта тела при втором броске. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Поясняющий рисунок: две траектории с одной начальной скоростью и одной дальностью (построены для 30° и 60°)

▲ **Решение.** **Что происходит.** Без сопротивления воздуха тело летит с постоянным ускорением $\vec{g}$: по горизонтали — равномерно, по вертикали — равноускоренно. Время полёта задаёт вертикальная составляющая скорости, дальность — произведение горизонтальной составляющей на время. Одна и та же дальность при одной скорости получается при двух углах, дополняющих друг друга до 90°. Тогда произведение двух времён выражается только через L и g. Класс задачи — движение тела, брошенного под углом к горизонту.

Обозначения. v_0 — модуль начальной скорости; α_1, α_2 — углы бросков; $t_1 = t$ и t_2 — времена полёта. Ось x — горизонтально в сторону полёта, y — вертикально вверх, начало — в точке броска.



Начальная скорость и её проекции на оси; ускорение $\vec{g}$ направлено вниз

1. Время полёта. Закон движения по вертикали: $y(\tau) = v_0 \sin\alpha\, \tau - \dfrac{g\tau^2}{2}$. Тело падает на землю, когда $y = 0$ (второй корень, не $\tau = 0$):

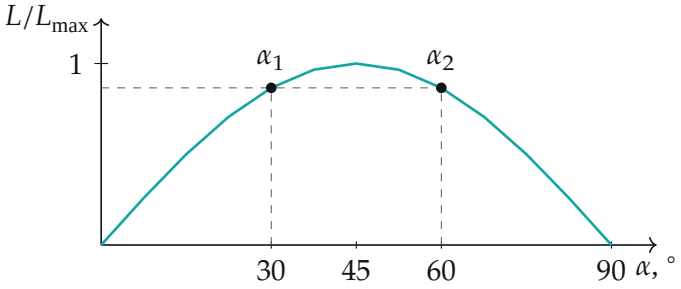
$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

2. Дальность. По горизонтали ускорения нет, $x(\tau) = v_0 \cos\alpha\, \tau$; за всё время полёта

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Дальность зависит от $\sin 2\alpha$, а $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2(90^\circ - \alpha)$. Поэтому при одной скорости одна дальность получается под углами α и $90^\circ - \alpha$ — других углов нет (на $0 < \alpha < 90^\circ$ уравнение $\sin 2\alpha = \text{const}$ имеет не больше двух корней). Броски разные, значит,

$$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1.$$



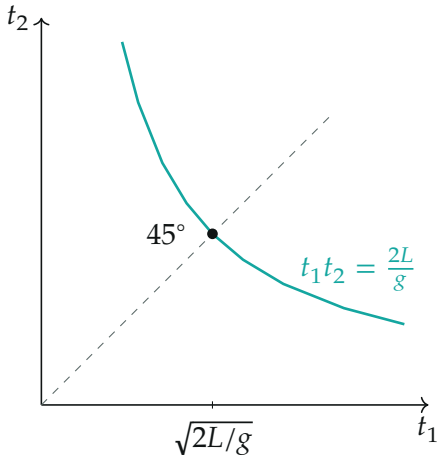
Дальность $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ от угла: график симметричен относительно $45°$, одной дальности отвечают углы α_1 и $90° - \alpha_1$

3. Произведение времён. Подставим $\sin\alpha_2 = \sin(90° - \alpha_1) = \cos\alpha_1$:

$$t_1 t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha_1}{g} \cdot \frac{2v_0 \cos\alpha_1}{g} = \frac{2}{g} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{2L}{g}.$$

Скорость и углы ушли: произведение времён зависит только от дальности. Отсюда

$$t_2 = \frac{2L}{g\,t}.$$



Все пары времён полёта на одну дальность лежат на гиперболе $t_1 t_2 = 2L/g$; на биссектрисе — бросок под $45°$, где оба броска совпадают

Обратите внимание: формула не требует знать ни v_0, ни углы — их и нет в условии. Если $t = \sqrt{2L/g}$, то $t_2 = t$: это бросок под 45°, и «второй бросок» совпадает с первым.

Проверка. Размерность: $\dfrac{L}{g\,t} = \dfrac{\text{м}}{\text{м/с}^2 \cdot \text{с}} = \text{с}$. Пример: $v_0 = 10$ м/с, $g = 10$ м/с^2, углы 30° и 60°: $t_1 = 1$ с, $t_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ с, $L = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8{,}66$ м, и $\frac{2L}{g t_1} = 1{,}73$ с — совпало. Второй способ: из $L = v_0 \cos\alpha_1\, t_1$ и $v_0 \cos\alpha_1 = v_0 \sin\alpha_2 = \frac{g t_2}{2}$ сразу $L = \frac{g t_1 t_2}{2}$.

Смысл: горизонтальная скорость одного броска равна начальной вертикальной скорости другого, $g t_2/2$, поэтому дальность равна $g t_1 t_2/2$.

Ответ. $t_2 = \dfrac{2L}{g\,t}$.