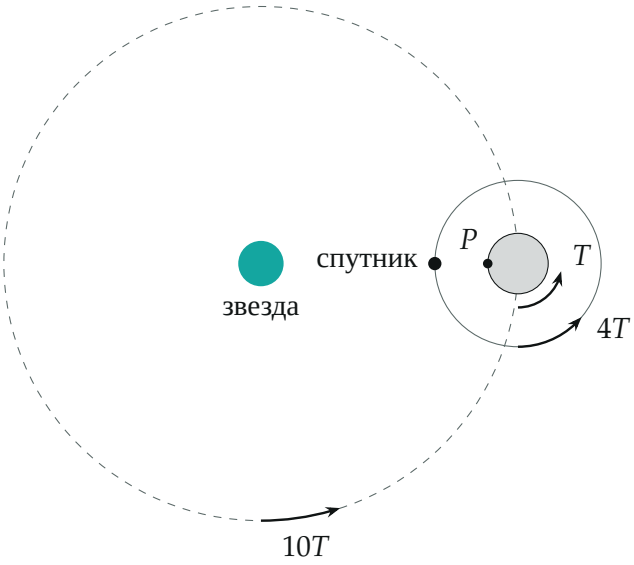
Затмения звезды на экваторе планеты

Задача 4. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 10 класс, задача 4] Вокруг некоторой звезды вращается планета. Период обращения планеты вокруг своей оси T, вокруг звезды — $10T$. Вокруг планеты вращается спутник с периодом обращения $4T$. Через какое время в данной точке на экваторе планеты повторяется затмение звезды? Планета и спутник вращаются в одной плоскости в одном направлении.



Поясняющий рисунок (не в масштабе): планета обращается вокруг звезды, вращается вокруг оси, вокруг неё обращается спутник — всё в одну сторону. Момент затмения в точке P: звезда, спутник и P на одной прямой

▲ **Решение. Что происходит.** Затмение в точке P экватора — это момент, когда спутник закрывает звезду для наблюдателя в P: звезда и спутник оба у него в зените, на одной прямой с центром планеты. Удобнее всего смотреть из системы отсчёта, вращающейся вместе с планетой: в ней точка P неподвижна, а звезда и спутник ходят по «небу» каждый со своей относительной угловой скоростью. Затмение повторится, когда и звезда, и спутник одновременно вернутся в зенит точки P — каждый сделает целое число оборотов. Класс задачи — сложение угловых

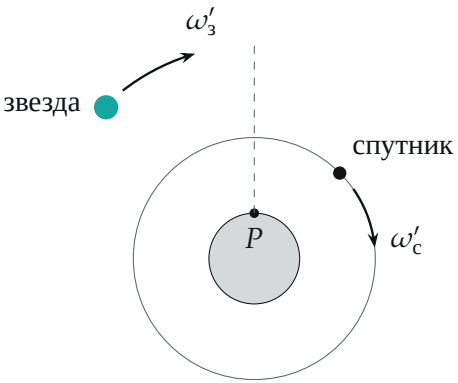
скоростей, повторение совпадений (наименьшее общее кратное периодов).

Обозначения. Угловые скорости (все против часовой стрелки на рисунке): $\omega_п = \dfrac{2\pi}{T}$ — вращение планеты вокруг оси; $\omega_з = \dfrac{2\pi}{10T}$ — поворот направления «планета → звезда» (планета обходит звезду за $10T$, и это направление поворачивается с той же скоростью); $\omega_с = \dfrac{2\pi}{4T}$ — обращение спутника. t — искомое время.

1. Переход во вращающуюся систему отсчёта. В системе, связанной с вращающейся планетой, каждое направление поворачивается с угловой скоростью, меньшей на $\omega_п$ (правило сложения угловых скоростей при вращении в одной плоскости). Все повороты в одну сторону, поэтому в этой системе звезда и спутник отстают от вращения планеты и движутся по «небу» назад со скоростями

$$\omega'_з = \omega_п - \omega_з = \frac{2\pi}{T}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{9}{10},$$

$$\omega'_с = \omega_п - \omega_с = \frac{2\pi}{T}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3}{4}.$$



В системе отсчёта планеты точка P неподвижна, а звезда и спутник уходят по небу в сторону, противоположную вращению планеты

2. Когда каждое из тел в зените P**.** Звезда (или спутник) снова над P, когда относительный поворот — целое число оборотов. Звезда в зените

через каждые

$$T'_з = \frac{2\pi}{\omega'_з} = \frac{10}{9}\,T$$

(это солнечные сутки планеты), спутник — через каждые

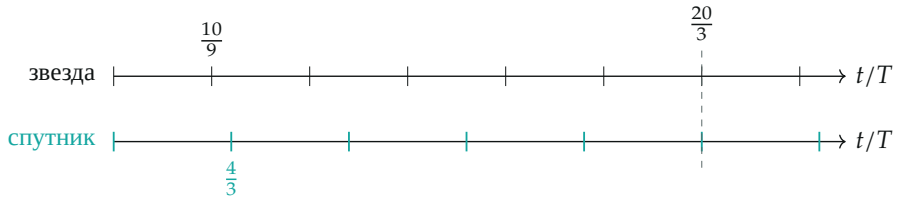
$$T'_с = \frac{2\pi}{\omega'_с} = \frac{4}{3}\,T.$$

3. Совпадение. Затмение — оба одновременно в зените. Пусть в $t = 0$ было затмение; следующее при

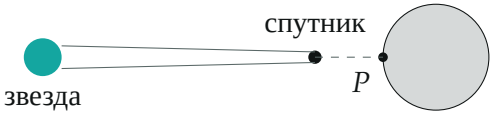
$$\omega'_з t = 2\pi k, \qquad \omega'_с t = 2\pi n, \qquad k, n \text{ — целые} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10}{9}T\,k = \frac{4}{3}T\,n.$$

Отсюда $10k = 12n$, то есть $5k = 6n$. Наименьшие натуральные решения: $k = 6$, $n = 5$, и

$$t = \frac{10}{9}T \cdot 6 = \frac{4}{3}T \cdot 5 = \frac{20}{3}\,T.$$



Моменты, когда звезда (чёрные засечки, шаг $\frac{10}{9}T$) и спутник (бирюзовые, шаг $\frac{4}{3}T$) в зените P; первое совпадение после $t = 0$ — при $t = \frac{20}{3}T$ (шестые сутки, пятый проход спутника)



Затмение: спутник на прямой «звезда — точка P», между ними; поэтому звезда и спутник одновременно в зените P (не в масштабе)

Обратите внимание: сутки на планете — не T, а $\frac{10}{9}T$: пока планета поворачивается на оборот, она смещается по орбите, и до звезды надо довернуть. То же со спутником: он сам обращается в ту же сторону, поэтому над точкой он бывает реже, чем раз за T.

Проверка. Размерность — время, $t \propto T$. Прямой счёт через углы в неподвижной системе: за $t = \frac{20}{3}T$ направление на звезду повернулось на $\frac{20/3}{10} = \frac{2}{3}$ оборота, спутник — на $\frac{20/3}{4} = \frac{5}{3}$ оборота, точка P — на $\frac{20}{3}$ оборота. Разности: $\frac{20}{3} - \frac{2}{3} = 6$ и $\frac{20}{3} - \frac{5}{3} = 5$ — целые, значит, и звезда, и спутник снова над P. Меньшего общего времени нет: 6 и 5 взаимно просты.

Смысл: затмения повторяются через наименьшее общее кратное суток планеты относительно звезды $\frac{10}{9}T$ и периода прохождения спутника над точкой $\frac{4}{3}T$.

Ответ. $t = \dfrac{20}{3}T$.