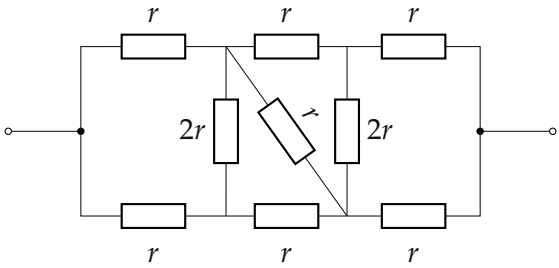
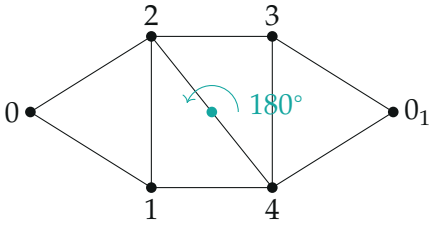
# Симметричная цепь из резисторов $r$ и $2r$

**Задача 5.** [Росатом 2018/19, отборочный этап, 10 класс, задача 5] Найти сопротивление данной электрической цепи. Значения сопротивлений элементов цепи приведены на рисунке.



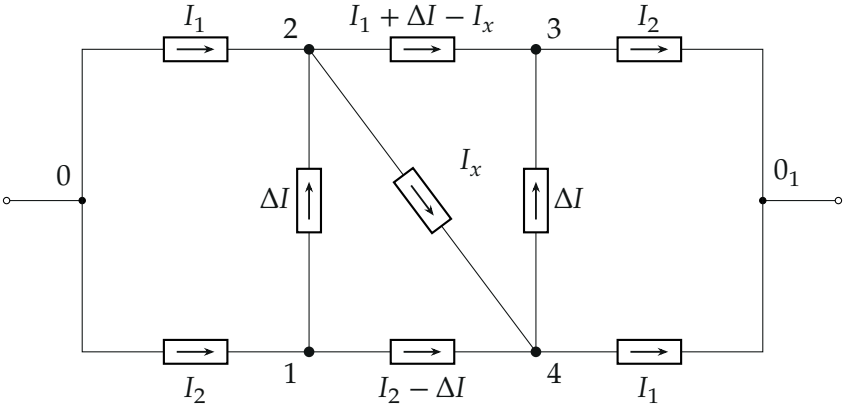

▲ **Решение. Что происходит.** Цепь не сводится к последовательным и параллельным соединениям (диагональ $r$ мешает), поэтому нужны правила Кирхгофа. Число неизвестных токов резко уменьшает симметрия: при повороте схемы на 180° она переходит сама в себя, вход и выход меняются местами. Отсюда токи в симметричных ветвях равны, и останется три-четыре неизвестных. Класс задачи — сопротивление несводимой цепи, правила Кирхгофа и симметрия.

**Обозначения.** Узлы 0 (вход), $0_1$ (выход), 1, 2, 3, 4 — как на рисунке ниже; $U$ — напряжение между 0 и $0_1$, $I$ — полный ток; $\varphi_k$ — потенциал узла $k$.




*Граф цепи: поворот на* 180° *вокруг центра (бирюзовая точка) переводит* $0 \leftrightarrow 0_1$, $2 \leftrightarrow 4$, $1 \leftrightarrow 3$ *и каждую ветвь — в ветвь того же сопротивления*

**1. Симметрия.** Повернём схему на 180° и поменяем направления всех токов: получится та же цепь с тем же током $I$ от 0 к $0_1$. Решение единственно, значит, ток в ветви равен току в её образе: $I_{02} = I_{40_1}$, $I_{01} = I_{30_1}$, $I_{12} = I_{43}$ (ветви $2r$). Диагональ $2 \to 4$ переходит сама в себя. Обозначим токи так, как на рисунке: $I_1$ — через 0–2 и 4–$0_1$, $I_2$ — через 0–1 и 3–$0_1$, $\Delta I$ — через обе ветви $2r$ (вверх), $I_x$ — через диагональ. Правило токов для узлов 1 и 2 даёт токи в ветвях 1–4 и 2–3.




*Токи с учётом симметрии; направления $\Delta I$ и $I_x$ выбраны условно — знак покажет расчёт*

**2. Правило токов для узла** 4. Втекают $I_x$ (диагональ) и $I_2 - \Delta I$, вытекают $I_1$ и $\Delta I$ (вверх по $2r$):

$$I_x + I_2 - \Delta I = I_1 + \Delta I \quad \Rightarrow \quad I_x = I_1 - I_2 + 2\Delta I.$$

**3. Правило напряжений для контура** 0–2–1–0**.** Закон Ома для каждой ветви: $\varphi_0 - \varphi_2 = I_1 r$, $\varphi_0 - \varphi_1 = I_2 r$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta I \cdot 2r$. Разность $\varphi_0 - \varphi_2$ по двум путям одна:

$$I_1 r = I_2 r + 2\Delta I\, r \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 + 2\Delta I.$$

Подставив в шаг 2: $I_x = 4\Delta I$.

**4. Правило напряжений для контура** 1–2–4–1. $\varphi_1 - \varphi_4 = (I_2 - \Delta I)r$

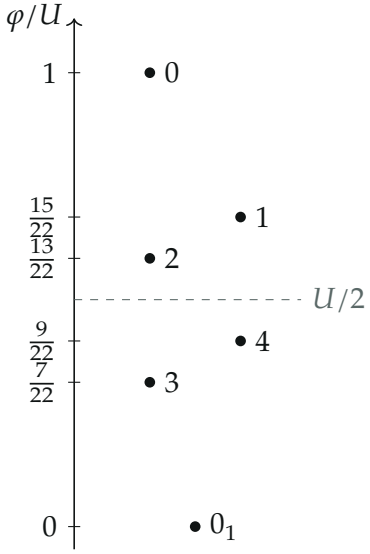
напрямую и $\varphi_1 - \varphi_4 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_4) = 2\Delta I\, r + I_x r$ через узел 2:

$$I_2 - \Delta I = 2\Delta I + 4\Delta I \quad \Rightarrow \quad I_2 = 7\Delta I, \qquad I_1 = 9\Delta I.$$

Все токи положительны — направления угаданы верно.

**5. Сопротивление.** Полный ток $I = I_1 + I_2 = 16\Delta I$. Напряжение — по пути $0 \to 2 \to 4 \to 0_1$:

$$U = I_1 r + I_x r + I_1 r = (9+4+9)\Delta I\, r = 22\Delta I\, r, \qquad R = \frac{U}{I} = \frac{22}{16}\, r = \frac{11}{8}\, r.$$




*Потенциалы узлов (выход $\varphi_{0_1} = 0$): узел 1 выше узла 2 — поэтому ток $\Delta I$ в ветви $2r$ идёт вверх; пары 1–3 и 2–4 симметричны относительно $U/2$*

Обратите внимание: в схеме нет узлов равного потенциала, и «выбросить» ветвь $2r$ или диагональ нельзя — через все ветви ток идёт.

**Проверка.** Размерность — омы. Независимо: метод узловых потенциалов (система для $\varphi_1 \ldots \varphi_4$, решена на python) даёт $\varphi_1 = \frac{15}{22}U$, $\varphi_2 = \frac{13}{22}U$, $\varphi_3 = \frac{7}{22}U$, $\varphi_4 = \frac{9}{22}U$ и $R = 1{,}375\, r = \frac{11}{8}r$. Оценки: без диагонали и ветвей $2r$ было бы две ветви по $3r$, $R = 1{,}5r$. $\frac{11}{8}r$ чуть меньше $1{,}5r$: добавочные ветви немного снижают сопротивление.

Смысл: симметрия сводит девять токов к четырём, а два контура и один узел их находят.

**Ответ.** $R = \dfrac{11}{8}\,r$.