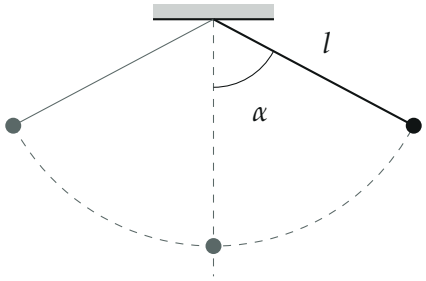
Ускорения математического маятника

Задача 1. [Росатом 2018/19, отборочный этап, 11 класс, площадка 1, задача 1] Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости. Известно, что ускорение маятника в нижнем положении в 1,2 раза больше его ускорения при максимальном отклонении. Найти угол максимального отклонения маятника от положения равновесия.



Поясняющий рисунок: маятник длины l в крайнем положении (угол α), серым — нижнее и другое крайнее положения

▲ **Решение. Что происходит.** В двух точках ускорение маятника устроено по-разному. В крайней точке скорость равна нулю, центростремительного ускорения нет, и ускорение — только касательное, от составляющей силы тяжести вдоль траектории. В нижней точке, наоборот, касательная составляющая силы тяжести равна нулю, и ускорение — только центростремительное, v^2/l. Скорость внизу даёт закон сохранения энергии. Класс задачи — полное ускорение при движении по окружности: касательное плюс нормальное.

Обозначения. l — длина нити, m — масса груза, α — угол максимального отклонения, v — скорость в нижней точке, a_α и a_0 — ускорения в крайней и в нижней точках. Сопротивления воздуха нет.

1. Ускорение в крайней точке. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекциях на оси: τ — по касательной к окружности вниз по дуге (вдоль $\vec{a}$ на рисунке), n — вдоль нити к точке подвеса (по ней на-

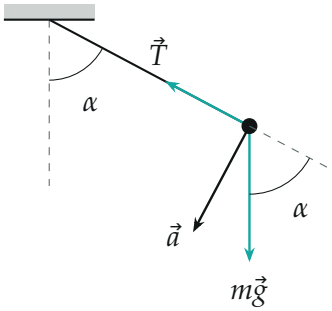
правлено центростремительное ускорение):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T};$$

$$\tau:\ ma_\tau = mg\sin\alpha, \qquad n:\ ma_n = T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l} = 0.$$

Скорость здесь равна нулю, поэтому $a_n = 0$, и всё ускорение касательное:

$$a_\alpha = g\sin\alpha.$$



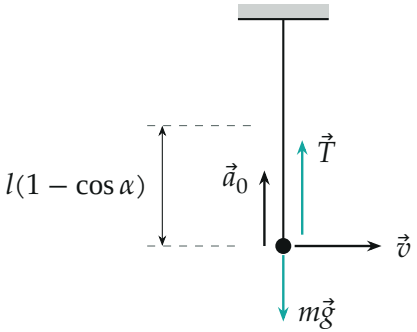
Крайнее положение: скорость равна нулю, ускорение направлено по касательной (вниз по дуге), $a_\alpha = g\sin\alpha$; угол между $m\vec{g}$ и нитью тоже α

2. Скорость в нижней точке. Закон сохранения механической энергии груза между крайней и нижней точками (натяжение перпендикулярно скорости и работы не совершает): груз опускается на $l(1-\cos\alpha)$,

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gl(1-\cos\alpha).$$

3. Ускорение в нижней точке. Здесь сила тяжести и натяжение вертикальны, касательного ускорения нет; ускорение центростремительное, к точке подвеса:

$$a_0 = \frac{v^2}{l} = 2g(1-\cos\alpha) = 4g\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$



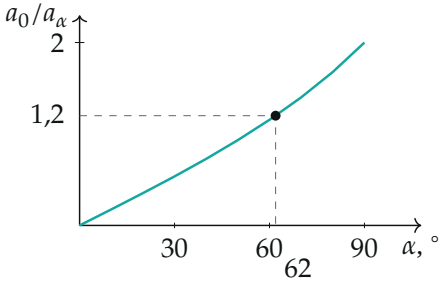
Нижнее положение: ускорение центростремительное, к точке подвеса; слева — на сколько груз опустился из крайнего положения

4. Угол. По условию $a_0 = 1{,}2\,a_\alpha$:

$$\frac{a_0}{a_\alpha} = \frac{4\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}6.$$

Через косинус: $\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)} = \dfrac{0{,}64}{1{,}36} = \dfrac{8}{17}$, то есть

$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}6 = \arccos\frac{8}{17} \approx 62^\circ.$$



Отношение ускорений $2\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$ от амплитуды: монотонно растёт, значение $1{,}2$ — при $\alpha \approx 62^\circ$

Обратите внимание: «ускорение маятника» — полное ускорение груза, а не только касательное. В нижней точке касательное ускорение равно нулю, но полное — нет: груз движется по окружности.

Проверка. Размерность: обе части отношения — ускорения, ответ безразмерен. Предел: при малых амплитудах $a_0/a_\alpha \approx \alpha \to 0$ — внизу ускорение мало по сравнению с крайним, как и должно быть при гармонических колебаниях; при $\alpha = 90^\circ$ отношение 2 ($a_0 = 2g$, $a_\alpha = g$). Численно: $\cos\alpha = 8/17$, $\sin\alpha = 15/17$; $a_0 = 2g \cdot \frac{9}{17} = \frac{18}{17}g$, $a_\alpha = \frac{15}{17}g$, отношение $\frac{18}{15} = 1{,}2$.

Смысл: чем больше амплитуда, тем быстрее груз проходит низ и тем больше там центростремительное ускорение; равенство 1,2 выделяет одну амплитуду.

Ответ. $\alpha = 2\operatorname{arctg} 0{,}6 = \arccos\dfrac{8}{17} \approx 62^\circ$.